

比例・反比例の授業における数学的談話の構成[†]

—学習軌道からみた授業中の発話の考察 (1)—

日野 圭子*
宇都宮大学大学院教育学研究科*

宇都宮大学教育学部教育実践紀要 第4号 別刷

2018年2月28日

比例・反比例の授業における数学的談話の構成[†]

—学習軌道からみた授業中の発話の考察 (1)—

日野 圭子*

宇都宮大学大学院教育学研究科*

In order to develop lessons on function in grade 7 to make the smooth transition from primary school to lower secondary school, this paper presents a model of learning trajectory on proportional/inverse-proportional functions. The model clarifies different qualities (or stages) with respect to looking at and reasoning with covariation and correspondence between two quantities. The model is used to analyze utterances by teachers and students in the lessons of a design experiment. Results show that all stages (stage 1 – 6) were identified in their utterances. The students tended to omit one of the variables to express change (stage 1). They also uttered “2 meters a second” or “constant pace” (stage 3) in different contexts of the lessons. Stage 4, which requires explicit use of rate, was the least observed. The numbers of observations heavily depended on who uttered, which indicates large differences in the stages among the students.

キーワード：数学的談話，学習軌道，比例・反比例

1. はじめに

本研究の目的は、小学校から中学校への学習の円滑な接続を視野に入れて、中学校1年の関数に関わる授業をデザインすることである。筆者はこれまで、「比例と反比例」の単元において、小学校高学年で学んできた比例、反比例を振り返り、関数的な見方で見直していくための手立てを考案し、デザイン実験を行ってきた。

本研究では、授業における談話 (discourse) に着目している。中学校1年の「比例と反比例」の単元では、小学校と比べると、「関数」、「変数」、「変域」等の新しい言葉が導入される。また、比例・反比例においても、「比例定数」等の言葉が導入されるとともに、変域や比例定数において、負の数が扱われるようになる。そして、それに伴って、表やグラフという視覚的な媒介の道具にも修正が加わる。

この変化の中心は、関数という数学的対象によっ

て、生徒がそれまで学んできた比例、反比例を振り返り、負の数を含むものに拡張し、比例と反比例とを関連づけて理解することであると考える。しかし、関数という数学的対象は、言葉が導入されればすぐに構成されるものではない。関数に関わる言葉を使い、ナラティブを生成し、承認していくことを含む長期にわたる複雑な過程である (Tabach & Nachlieli, 2015)。従って、比例・反比例を振り返り、見直す過程の中で、関数という対象自体も少しずつ構成されていくと思われる。

本稿では、この過程をみていく手がかりを、関数の典型的な見方である「変化の見方」と「対応の見方」に求める。すなわち、生徒が、授業中の様々な活動の中で、対象にしている事象について、変化や対応の側面からどうみて、どう語っているかに着目する。それらの語り方の質を上げていくことが、談話の変化を促すことにつながると考える。

本稿では、2016年11～12月に行った授業実践において、教師や生徒が、伴って変わる2つの数量の変化や対応について、どのような語りをしていたかを探る。そのために、関数の学習軌道の先行研究を参照し、比例・反比例の学習軌道を提案する。提案する学習軌道は、伴って変わる2つの数量の変化と対応に関わる見方、語り方の質を区別するものである。

[†] Keiko HINO*: Construction of mathematical discourse in the lesson of proportional/inverse-proportional function

Keywords: Mathematical discourse, Learning trajectory, Proportion, Inverse-proportion

* Graduate School of Education, Utsunomiya University

(連絡先: khino@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

2. 変化と対応からみる関数の学習軌道

(1) 先行研究

学校数学において、伴って変わる2量間の関数関係の規則性を捉える上で、共変関係（変化の見方）と対応関係（対応の見方）が区別されている。変化と対応の見方は、小学校や中学校での数量関係の学習指導における要でもある。

共変関係と対応関係は、生徒の関数的思考の進展においてどのように位置づいているだろうか。近年、共変関係を用いた推論の質の高まりを捉えるモデルや、共変関係と対応関係の両面の認識を視野に入れた関数の学習軌道（learning trajectory）が提案されている。

例えばCarlson et al. (2002) は、共变的推論を「量同士が互いに関連しながら変わっていく仕方に注目しながら、変化する2量を調整することを含む認知的活動」として、共変関係の調整について5つの心的行為を同定する。また、心的行為を可能にする共変のイメージとして、「共变的推論のレベル」を提案している。このレベルでは、心的行為1のみを支えるレベル1（「調整」）から、心的行為1と2を支えるレベル2（「方向」）のように、支える心的行為が増えていく。レベル3（「量的な調整」）、レベル4（「平均的な比率」）を経て、レベル5（「瞬間的な比率」）では、5つすべての心的行為が支えられるとしている。なお、ここでの対象は、微積分を学習する高校生である。

Ellis et al. (2016) は、数名の8年生に対する2回の教授実験を通して、指数関数に関わる学習軌道を見出している。そこでは、主要な推論の段階である「前関数的な推論」、「共変推論」、「対応推論」と、そこに「初期の共変推論」を含めた4つの推論が提案され、各々について鍵となる理解の要素が示されている。ここで、前関数的な推論の段階は、他の段階に対して先んじるが、共変推論と対応推論の間に順序性はなく、初期の共変推論についての理解が構成された後に、より洗練された共変推論と対応推論とが連携して働きながら両者が構成されていくと述べられている（p. 160）。

(2) 比例・反比例の学習軌道の提案

本研究が対象とする関数は、上記の先行研究よりも基本的なものである。しかし、やはり共变的推論と対応的推論の両面での思考の高まりが期待できると考えている。日野（2017）では、先行研究に基づき、中学校1年の比例・反比例の学習において、以下のような生徒の推論の質（「比例・反比例の学習軌道」と呼ぶ）を区別した。ここでの「段階」は、

Ellis et al. (2016) に倣い、ある特徴が継続して見られるような期間を指している。

- ① 伴って変わる2量の調整が行われる以前の段階：2つの量が伴って変わるということのイメージをまだ持っていない。
- ② 伴って変わる2量の調整が始まる段階：2つの量が伴って変わることのイメージを持ち始める。2つの量が意識され、また、2量の最初の調整の仕方として、方向の言葉や、限定された範囲において、ある変数の変化の大きさを他の変数の変化の大きさと比べるような言葉が出始める。
- ③ 累加ベースの共变的な推論の段階：ある変数の変化の大きさが1のときに、他の変数の変化の大きさがどうなっているかをイメージしていく。
- ④ チャンクによる共变的な推論の段階：ある変数の変化の大きさが1以外についても、再単位化を行うことで、他の変数の変化の大きさを柔軟にイメージしていく。割合を明示的に使うことを伴い、累加ベースのイメージに頼らなくなる。
- ⑤ 手続きベースの対応的な推論の段階：2つの変数の間の対応のきまりによって結び付いた個々のxの値とyの値のペア（あるいはペアの離散的な集合）をイメージしていく。xの値から、手続きに従ってyの値が求められる。
- ⑥ 対応的な推論の段階：2つの変数の間の対応関係を、全体を見通してイメージしていく。式に現れる定数（a）が、xからyを作っていく上で、どのような影響を与えているかが分かる。表やグラフによる表現でも、 y/x 、 xy が常に一定になっていることを使って考えることができる。

ここで、①、②は、③以降に先んじると考え、③は④に、また、⑤は⑥に先んじると考える。しかし、Ellis et al.らの研究で明らかにされていることを受け、③④と⑤⑥の間に順序は付けていない。共变的な推論と対応的な推論は互いに影響し合いながら、同時に進展していくと考える。

3. 授業実践

(1) 授業のデザインについて

小学校において、比例・反比例の学習は、正の領域での具体的な場面で行われる。また、比例・反比例の特徴を表・式・グラフで考察していくことが中心である。中学校1年の授業デザインでは、冒頭で述べたように、小学校での比例・反比例の学習を振

り返り、関数としての特徴に生徒の注意を向けながら、表・式・グラフ自体でなく、その背後にある関数の存在に気付いていくことを目指した。

授業では、図1のような単元の流れを想定し、生徒に提示する課題や教師による語り方を考えた。その際、伴って変わる2量の変化と対応の見方を重視し、また、表・式・グラフは関数そのものではなく、関数を表現する手段であることも示していくようにした。

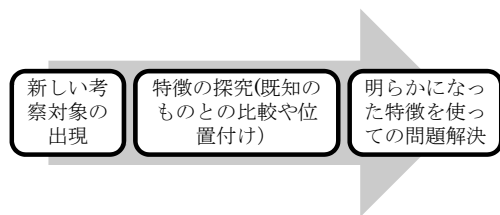


図1：比例・反比例の単元の流れ

授業に取り入れた手立ては、2015年の授業実践と同様であり、ア. GeoGebraを使用する、イ. 「比例一族」「反比例一族」「関数一族」という擬人化モデルを利用する、ウ. 図を使って関数、比例、反比例の集合の関係を書き込みながら進める、である(日野, 2016)。

アは、教科書の表やグラフ、式の表現だけでは、変化と対応の見方が乏しいと考え、両者を動的に示すことを可能にするために取り入れた。GeoGebraを用いてグラフや表、式を動的に見せたり、3者の対応を視覚化したりするデジタル教材を、教室前方の大型テレビ画面に映し出していくことを行った。

イ、ウは、比例、反比例、更には、関数を数学的対

象として認識することを促すための試みである。生徒が、比例や反比例、更に、関数を主語にして語ることを促すために、擬人化を行った(大谷ら, 2014)。「比例君はコツコツ一定のスピードで進む。」「どの比例君かは、比例定数で見分けることができる。」のように、比例自体を対象としてみるような語り方である。その際、ウも用いることで、比例、反比例、関数のメンバーを集合として表し、それらの関係を見え易くした。

更に今回は、前節で述べた変化と対応を使った生徒の推論について、より進んだ推論が可能になるように、幾つかの課題を修正した。その1つとして、「チャンクによる共変的な推論」を促す意図で、第1, 2時、第3時等で、生徒からの多様な解法を共有する機会を設けた。また、第9, 10時では、比例定数が分数であるものを課題に取り入れた。

アについては、第18時の課題でタブレットを使い、グループ活動時に生徒自身による操作を取り入れた。当初は、比例の式とグラフの関係(第8時)、反比例の式とグラフの関係(第16時)において、生徒が比例定数の異なる式とそれに対応するグラフを自由に入力し、式とグラフの関係について探究する活動を想定していた。しかし、諸事情からそれができず、1組の数対、また、グラフから式を求める課題において、生徒が考えた式が合っているかを確かめるためにGeoGebraを使うという取り入れ方となった。

(2) 授業実践の概要

表1は、実施された授業20時間の概要である。

表1：比例・反比例の単元の授業実践の概要

時	内容	主要な活動
・関数		
1	具体場面で量の関係の考察	封筒から画用紙を引き出すときに、引き出した長さ(1)全体の周の長さ、(2)引き出した部分の面積の関係を調べる。
2	変数、関数、変域の用語の導入	同じ封筒の課題で、自分で従属変数を決めて調べる。結果を振り返る。変数、関数、変域を導入する。
・比例		
3	比例の場面で変域を負の範囲に拡張	上りエレベータ(地上階)について、地上30mに着くのにかかる時間を求める。比例の確認。次に、同じ上りエレベータを地下に延ばした時の、地下の部分をどう表すかを、表で考える。
4	グラフ、式での表現	前時の続きとして、比例であることを確認。次に、式、グラフではどう表せるかを考える。
5	比例一族等の言葉の導入	式 $y=2x$ に負の数を入れても成立することを確認する。比例一族、関数一族と呼ぶことにする。
6	座標の導入と練習	第1時～第4時に扱った関係を集合の図に書き込む。比例、関数の特徴の確認。座標の導入と練習。下りエレベータの課題の提示。
7	比例定数を負の範囲に拡張、比例定数	下りエレベータが比例しているかどうかを調べる。比例一族に入れる。比例定数の導入(一族のメンバーを見分ける)。グラフをかく。

8	比例の式とグラフの関係	比例定数 a は、グラフのどこに現れているか。比例の式とグラフの関係を考える。発表された関係を比例一族に書き込む。
9	表、グラフ→式	比例の式とグラフの関係の続き。次に、学習した関係を使って式を求める。表やグラフから比例かどうかを判断して式を求める。
10	グラフ→式、練習問題	グラフから式を求める問題の続き。その後、練習問題。
11,12	グラフを使った身の回りの問題解決	A 駅から B 公園まで行くという身の回りの問題を、グラフで表現したり、グラフを読み取ったりして解決する。
・反比例		
13	反比例の導入と復習	横一定のとき縦と面積の関係を調べる。次に縦一定に、最後に面積一定にして、残りの2つの関係を調べる。反比例一族を書き込む。
14	反比例のグラフの復習。判断の問題練習	面積一定のときの縦と横の関係をグラフに表す。比例、反比例かどうかを判断する練習問題。
15	反比例の場面で変域・比例定数を負の範囲に拡張	上り・下りエレベータの場合を参照しながら、負の範囲に拡張したときに反比例の関係が成り立つかを調べる。反比例一族に書き込む。
16	反比例の式とグラフの関係	書いてきた複数のグラフをもとに、反比例の式とグラフの関係を考える。発表された関係を反比例一族に書き込む。
17	比例と反比例のグラフ、表→式	反比例の式とグラフの関係の続き。比例と反比例のグラフも比べる。その後、表から反比例かどうかを判断して式を求める。
18	グラフ→式	タブレットを使って、グループで、グラフから式を求める課題をする。
・比例・反比例の応用		
19,20	身の回りの問題解決	身の回りに隠れている比例一族、反比例一族等を見つける方法を考える。反比例の関係をjつて身の回りの問題解決をする。

4. データの収集と分析

すべての授業をビデオカメラで記録した。1台はクラス全体の様子、1台は1つのグループ(4名)のグループ活動を主に記録した。また、ICレコーダーも時々使って音声を記録した。授業はワークシートを使って進められた。ワークシートは、4名の生徒を中心に収集した。また、20時間中9時間については、筆者あるいは大学院生が授業を参観し、主に4名の生徒の活動の様子について、フィールドメモを作成した。

4名の生徒は、比例的推論および関数的な考えの事前調査と教師からの助言によって選出した。YamaとTukaは、事前調査からは、比例的推論が柔軟であり、比例の式、グラフについても理解している。Ohは、事前調査において、比例の式、グラフについての問いについては白紙であり、2量の変化についての見方は浅い様子がみられた。Saruは比例的推論があまり洗練されておらず、比例の式、グラフについての理解も曖昧であった。なお、単元の期間中座席は変わらず、4名は継続して同じグループで活動を行った。

現在、収集したデータから、授業過程の概要を作成し、変化や対応に関する教師や生徒の語りに注目して、探索的に分析を進めている。変化や対応についての発話(主に、一斉の場面での発話)をピック

アップして学習軌道の段階付けを行い、どのような様相が見られるかを探っている。次節では、第1時～第12時についての結果を述べる。

5. 変化、対応に関わる授業中の発話の様相

(1) 変化に関わる発話について

第3節で示した比例・反比例の学習軌道に基づいて授業中の発話に段階付けをした結果、①～④の段階が観察された。但し、どの段階が適切であるか迷う場合もあった。以下は、今回行った段階付けで分類した発話の例である。

- ① 「だんだん小さくなっていく」, 「2ずつ増えている」(第2時), 「はやく」「おそい」(第5時), 「(表において、 y の列の数字が) 3, 6, 9 になって3の倍数になっている」(第9時)
- ② : 「(GeoGebraで、1(秒)を入力すると y 軸上の58(cm)の部分に点が表示されたことを受けて) 1.1を入ると58cmよりちょっと上」「周りの長さが変わるから上がる」(第2時), 「(教師 x が増えるほど、 y が大きくなりますよ、…それが増加っていうこと」(第8時)
- ③ : 「1秒で2m」「秒速2m」(第3時), 「(表の負の部分で、 x の値が2倍になると、 y の値も2倍になっているかを確認する)」(第4時), 「一定の速さ」「同じペース」(第6時)。」「1分毎に

120ずつ…」(第12時)

- ④ : 「 $x=4$, $y=3$ である比例の式を求める問題で $4 \div 4$ で1, 3も, 割る4で, $1/4$ になっている」(第9時), 「10分で1200mなので, 5分では600m進む。 600×3 で1800になるから15分を出した」(第12時)

段階①について

段階①は, 伴って変わる2つの量の調整がまだ行われていない段階であり, 1つの量の変化に注目し, それを質的に表現したり, 数値によって表現したりする。12時間の授業においては, 第1, 2, 3, 4, 6, 9時に, 段階①に分類される発話が観察された。

生徒は, 変化について話すときは, x (時間であることが多い) と y の関係にまでは触れずに, y の変わり方のみを話すことが少なくないことが分かった。生徒も教師も同じ具体物 (例えば, 封筒から出てくる紙) を見ているため, あまり厳密に話す必要性がないこと, 具体物では y が見えやすいということがあるのかもしれない。表について話す場合も, x が1ずつ増えていることは表から見えるため, その場で x について敢えて話す必要性がないのであろう。これは, GeoGebra を使って点の動きを再現するときも同様であった。動きそのものをみて, 「はい」「おそい」のように発話をしており, x が1増えるときに y がどう増えているかという話し方はなかった。

このような y のみの変化についての話し方を, 教師が指摘し, 修正している場面は, 第9時に観察された。表から式を求める場面で, 生徒が表をみて, y の列の数字が「3, 6, 9 になって3の倍数になっている」と発言した際, 「1ずつ増えれば3ずつ増える」のように言い直していた。

段階②について

段階②は, 伴って変わる2量の調整が始まる段階であり, 変化の方向を示す言葉や, 1つの数量の変化の大きさを他の数量の変化の大きさと比べる言葉が出てくる。授業においては, 第1, 2, 3, 5, 8, 11, 12時において, この段階に分類できる発話が確認された。

第2時の発話の例にあるように, 生徒は2つの量に対して, それぞれの変化の方向について話すことがあった。変化の仕方を聞かれるときに, このような答え方をすることは自然であった。第8時には, 比例の式とグラフの関係について, 生徒がグループ

で調べた様々な関係を発表していた。生徒からは「右上がり」「右下がり」という特徴は発表されたが, 変化については特に話されずに終わった。その後, 教科書に書かれているまとめを見て, 教師が「 x の増加(減少)」「 y の増加(減少)」について説明を行った。この時点では, 変化の方向についての話が出てきていた。

段階③について

段階③は, 累加をベースとする共変的推論の段階である。 x の増分が1のときの y の増分に注目したり, それを使ったりすることについての発話は, 第3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12時に観察された。

「1秒で2m」「秒速2m」といった「秒速」に関わる言葉は, 第3時にはじめて出てきた。GeoGebra も使いながら, エレベータが地上30m になるときの時間を求める課題の解決を発表する中で, 生徒がかいた「 $30 \div 2$ 」の式の「2」が問われた。その際に, 上記のような言葉が使われた。その後も, 「秒速」に関わる言葉は使われていった。また, 「ペース」という言葉は, 教師によって, 比例を特徴付ける上で使われていた。第6時に, 今までに出てきた関数を整理して, 集合の図の中に「関数」と「比例」に属するものを書き入れることが行われた。教師が主導での活動であったが, 第3時に扱った「上りエレベータ」を比例に書き込む際に, 「同じペースで増えていく。コツコツと同じペースでいく。これが比例一族。」のように教師が話す場面があった。「同じペース」は第7時の比例の特徴でも教師によって使われた。第12時には, これも教師であるが, 「グラフを伸ばすということはスピードを変えないということ」といった発話もあった。しかし, 生徒の発話に「ペース」という言い方は確認されていない。

比例であるかどうかを確認する場面は, 上りエレベータ, 下りエレベータの文脈をはじめとして, 何度かみられた。「一方が2倍, 3倍になると, 他方も2倍, 3倍になる」ことを, 表の x , y を用いて確認する際には, $x=1$ から $x=2$ へ, あるいは, $x=2$ から $x=6$, $x=-3$ から $x=-6$ へなど, 整数値について, x が変化したときの y の対応する値の変化が調べられていた。ここでは, x の増分が1の場合, あるいは, それを複数まとめた単位が (2や-3) 扱われている。単位の累加で処理できる範囲内であるため, 段階③に含まれると考えている。

第9時のはじめに, 教師は, 表において x が1増

えたときにyが2増えることは、グラフではどこに相当するのかを問題にした。図1のようなGeoGebraの画像を示し、直角三角形(xの増分が1, yの増分が2が示されている)をスライドさせて、「横に1個増えたときに2個増えますよ。…比例定数は1増えたときにyが幾つ増えるか。それはどこでも一緒ですよ。」と述べた。その際に、直角三角形を連続的にスライドすることも行ったが、増分1に限定されているため、段階③に分類している。

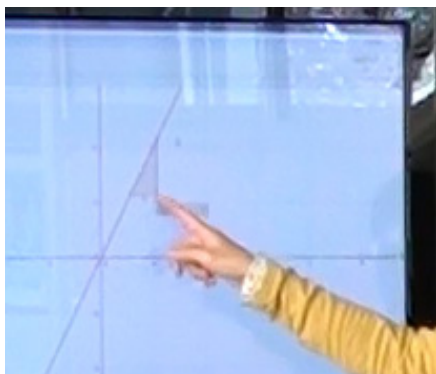


図1：xの増分が1の場合の直角三角形

第11, 12時には、公園まで歩くという状況で、グラフをよむことが課題解決の形で扱われた。1分間に進む道のりをグラフから読み取ると、その情報を使って、ある道のりを進むのにかかる時間を計算している生徒の発表があった。累加ベースの考え方であり、段階③であると考えられる。

段階④について

段階④は、xの増分が1での累加ベースによるイメージに頼らなくなり、チャンクによって単位化、再単位化がなされていく段階である。この段階には、割合の理解が求められるため、生徒にとっては困難な面もあると考えられる。段階④が観察された授業は、第10, 12時であった。他の段階に比べると、かなり少なかったことになる。

第10時は、第9時からの続きの授業であった。第9時には、グラフから式を作る練習の場面があったが、その中の問題の1つは、点(4, 3)を通るグラフから式を作るというものであった。発表を行ったのはSaruであった。Saruは、「 $y=3/4x$ 。4が先に書いてあったから。xが4だからここ(分母)が4, yは分子で3」と述べた。Saruは、個別や周りと相談しながら問題を解いているときから、このやり方を

していた。予想外の方法に、教師も友人も戸惑いを見せ、何故その方法でよいのかが問題になった。

「グラフでいうとaってどこに現れてくるの?」という教師の問いかけで比例一族の特徴を見直した。その際生徒から、「xが1のときのyの値」が出され、教師が図2の1, aの部分をかいた。教師は、更に付け加えて、(4, 3), 4, 3をかいた後、「aを出すためにはどうしたらいいの?」と問いかけ、1分程隣同士で相談する時間をとった。その後、生徒から「 $3 \div 4$ 」が出され、その理由として、生徒は「4を4で割って…」と述べた。その後は教師が補って話し、「 $1/4$ 。4で割るんだよね。ってことは、ここは小さい、ここは大きい。(大きい三角形について)ここ3だったらここも4分の1になる、だから4で割りました。」と説明した。ここでは、累加ベースではなく、単位を分割したり、分数倍を使ったりする段階④の推論が見られる。

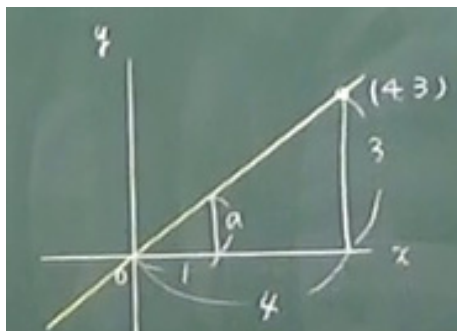


図2：黒板に書かれた図

その後、教師がGeoGebraで、 $y=3/4x$ のグラフの傾きを示す直角三角形が小さくなっていき、xの増分が1, yの増分が0.75となる様子を見せた(図1のグラフや三角形を参照のこと)。また、 $y=0.5x$ のグラフについて、直角三角形を徐々に大きくしていき、(1, 0.5), (2, 1), (4, 2), (6, 3)を通っていき様子を見せた。その中で、教師は「 $2/4$, 約分すると $1/2$ 。 $3/6$, 約分すると $1/2$ 。やっぱり同じになりますよ。同じ割合で伸びますよ、となります。」と述べた。「割合」という言葉が使われた稀な場面の1つであった。

段階④が観察されたもう1つの場面は、第12時であった。太郎と花子の歩いた時間と道のりを示すグラフからは、歩きはじめてから10分後に、2人の間に1200mの差が出るのが読み取れる。その情報を使って、2人の間が1800mになるのは何分後かを求

める方法が発表された。生徒は、10分→1200m、5分→600mとなり、 600×3 で1800mとなるので、15分を出していた。ここでは、1200と1800を埋めるために、10分で1200mから、5分で600mへと単位が取り直され、その単位を使って1800mを再測定し、離れるのが15分であると推論している。1/2という簡単な分数の場合ではあるが、割合が使われている。

(2) 対応に関わる発話について

比例・反比例の学習軌道では、⑤と⑥が対応の見方、考え方に関わる。やはり、段階付けにおいて困難なものがあった。以下は、今回分類された発話の例である。

⑤：「(封筒から1cmずつ紙を引き出して、周りの長さがいくつになるかを調べる) 1のときは56、2では58…」(第1時)、「(表から $y=2x$ の式を作り)、 $x=15$ (秒)のとき $y=2x$ に入れると $y=30$ になるから、30m」(第3時)、「((4, 12)を通る比例の式を求める際に)yの12をxの4で割った。aが出るから。 $y \div x=3$ で $y=3x$ 」(第9時)

⑥：「(地下の部分が比例しているかを聞かれて) 秒速2mは地上でも地下でも変わらないから」(第5時)、「(式が $2/3x$ のとき($y=2/3x$)整数になるためにはxがどんな値であればいいかを聞かれて) 分母の倍数」(第7時)、「aが小さい数ほどx軸に近づきaが大きい数ほどy軸に近づく」(第8時)

段階⑤について

段階⑤は、手続きベースの対応的な推論の段階であり、上の発話例のように、xの値から、手続きに従ってyの値を求めることが含まれる。このように、手続きを適用することで個別の対応をつけたり、幾つかの数値について同様の手続きを使ってできるペアの集合を考えたりできるが、変数の全体を見通すところまでは至らない。式にxを代入してyを求めるという手続きは、第8、12時以外の授業で観察された。生徒は、段階⑤を数多く経験していたと考えられる。

表を作る際には、各xの値に対するyの値を計算して書き込んでいく。第1時の発話例のように、伴って変わる2量の関係を調べていく場合には、式は与えられてはいない。第3時の発話例や、それ以降の時間では、式が与えられている場合に、xに対するyの値を計算して表を埋めていった。これらは段階⑤に相当する。また、グラフから比例の式を求める際には、生徒は様々な求め方を発表した。その中に

は、表や数対、あるいはグラフの点を使って、 $y=ax$ のx、yからaを求める方法があった。第9時の例では、 $y/x=a$ が使われている。段階⑤であるか段階⑥であるか迷うところであるが、この生徒は $y/x=a$ を一般的に捉えていることが発話からは確認できないため、段階⑤に分類している。

段階⑥について

一方、段階⑥は、2つの変数の間の対応関係を、全体を見通してイメージしていく段階である。ここには、(i) y/x が常に一定になっていること、 xy が常に一定になっていることを使って考えることができることが含まれる。また、(ii) 式による表現では、比例定数(a)が、xからyを作るうえでどのような影響を与えているかが分かることも含まれる。

(i) と (ii) のいずれも、授業において扱われる内容である。(i) に関しては、表で幾つかの数値について確かめながら、これらの特徴が繰り返し示された。(ii) に関しても、比例、あるいは、反比例の式とグラフの関係の授業において、比例定数「a」がプラス、マイナスになると、yに対してどのような影響が出るかなど、幾つかの特徴が発表された。第8時の例にみられるように、生徒が発表した特徴の中に、段階⑥での推論がうかがえるものも見られた。

このように、段階⑥は、第3、4、5、6、7、8、9、10時に観察された。その中には、生徒ではなく、教師が話している場面も少なくなかった。

生徒の発話の中に段階⑥であることがうかがえ、興味深かったものの1つは、第8時に、比例の式とグラフの関係をグループで見つけているときに、Yamaから出された「グラフ定数」という言葉である。また、Yamaは、その後グラフがx軸と作る「角度」にも言及をしていた。この言葉は、発表されることはなかったが、グラフの「傾き」を捉えようとしており、2変数の対応関係を全体的にイメージしていることがうかがえる。

また、第9時には、比例かどうかを判断する練習問題が数問扱われた。授業では、問題の1つに、図3のような表が与えられた。生徒達は、すぐに式を作り始めたが、生徒の中には $y=2x$ なのか、 $y=-2x$ なのかで困っている者もいた。

発表をした生徒は $y=2x$ という式を作っていた。

S1： $y \div x$ は2だから、 $y=2x$ になりました。

Ss：マイナス2じゃん？ $y \div x$ だったらマイナス2だよ(ざわつく)

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	6	4	2	0	2	4	6	8	...

図3：生徒に示された表

S1：でもこれ右側はプラスになってるよ。
 S2：それは右側の話だよ。
 S1：そしたら、これって表がおかしいんじゃないの。
 Ss：アハハ。そういうことだよ。(ざわつく)
 T：どうする？
 Ss：(グラフをかいてみるという声があがる)

ここで生徒と教師と一緒にグラフをかいたところ、図4のようなグラフになった。生徒からは「Vだ。」のような声があがり、教師が「えー、じゃあ、どうやって答えをかく？」と聞くと、複数の生徒から「比例じゃない。」という声があがっていた。

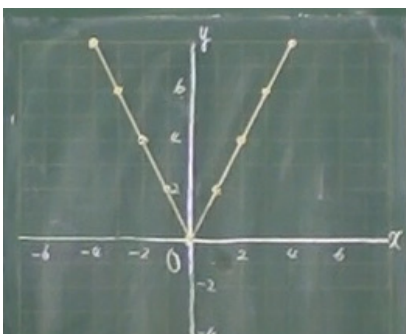


図4：図3の表に対するグラフ

生徒は x , y に異なる値を代入して式の一般性を確かめており、段階⑥であると考えられる。表等から判断し、式に表すタイプの問題は、教科書の例題にも掲載されている典型的なものであるが、数値を工夫することで、段階⑥の推論の機会を充実できることが分かる。

6. まとめと今後の課題

比例・反比例の学習軌道として質の異なる関数の変化、対応についての見方、考え方を区別し、どのような質の見方が授業の発話において表現されているかを考察してきた。

授業でのやりとりの中でこれらの違いを区別することは易しくはない。それでも1つ1つを見ていくと、変化・対応のいずれの見方も表現されていること、

頻繁に観察される段階とそうではない段階があることが分かった。また、1つの場面でも、様々な段階が目まぐるしく現れる。これは、発言する生徒によって、変化や対応の見方の質が異なるためであると考えられる。現時点では、まだ、授業中の発話の概要をもとにして、最初の12時間分の探索的な分析を行ったに過ぎない。今後、後半の反比例の授業についても考察を進めていきたい。

引用・参考文献

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 352-378.
- Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 18 (3), 151-181.
- 日野圭子. (2016). 「比例の授業における数学的談話の構成: GeoGebraを通して教師が語ったこと」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』2号, 145 - 154.
- 日野圭子. (2017). 「比例・反比例の授業における数学的談話の構成: 関数の学習軌道からの授業場面の考察」『宇都宮大学教育学部研究紀要』67号, 第1部, 189 - 202.
- 大谷実・布川和彦・日野圭子・漢野有美子. (2014). 「ディスコースを視点とした数学的対象の構成: 一次関数のデザイン実験とその分析」『第47回秋期研究大会発表集録』347 - 350.
- Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical object: The case of function. *Educational Studies in Mathematics*, 90, 163-187.

本研究は、平成27～30年度科学研究費補助金基盤研究(C)「小学校から中学校への移行期の生徒の関数的思考の進展を促す継続的な授業のデザイン」の助成を受けて行われている。

平成29年10月31日 受理

Construction of mathematical discourse in the lesson of proportional/inverse-proportional function

Keiko HINO*

* Graduate School of Education, Utsunomiya University