

# 高等学校数学科における体系的な理解を促す 授業に関する一考察<sup>†</sup>

牧野 智彦\*・湯澤 有孝\*\*・北川 義久\*  
宇都宮大学教育学部\*  
栃木県立矢板東高等学校\*\*

宇都宮大学教育学部教育実践紀要 第4号 別刷

2018年2月28日



# 高等学校数学科における体系的な理解を促す 授業に関する一考察<sup>†</sup>

牧野 智彦\*・湯澤 有孝\*\*・北川 義久\*

宇都宮大学教育学部\*  
栃木県立矢板東高等学校\*\*

高校生は数学を体系的に理解しているとは言い難いし、高校数学の授業も体系的な理解を促すようになっていない現状がある。そこで、本稿では、数学の体系に関する事柄について、過去の学習指導要領、昭和40年代の高等学校の教科書を調べ、体系的な理解を促す授業をデザインするための視点について考察した。

キーワード：体系的な理解、高等学校数学

## 1. 問題の所在

高等学校は、大学受験を見据えた授業になりがちである。数学の授業も、センター試験、個別学力試験の対策、対応として、問題演習が中心となっているのではないだろうか。大学入試に対応できる力をつけることが高校数学の主要な目的となっていることは否めない。そのため、高校生の数学学習は、数学の事実を知り、数学的な事実を問題解決に適用することに終始しているのではないだろうか。

一方、平成21年改訂高等学校学習指導要領をみると、高等学校数学科の目標は次の通りである。

数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

『高等学校学習指導要領解説数学編』では、高等学校数学の目標の改善点の一つとして、「理解」を「体系的な理解」という文言に変更したとしている。高

等学校数学ではこれまでも、体系的に組み立てていく数学の考え方を大切にしてきている。平成21年の改訂では、このことを踏まえつつ、数学を様々な場面で活用できるようにするために、知識を体系的に理解しておく必要があることを強調している。

また、平成28年12月の中央教育審議会の『幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申)』の別添資料41でも、「知識・技能」にかかわる資質・能力の一つとして、「数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解」が位置付けられている。

高校生が数学を体系的に理解しているだろうか、一方で、高校の数学授業が数学を体系的に理解するように促しているだろうか。多くの高校生は、数学的な事実がどのような前提のもとで成り立つことなのかへの意識はほとんどないだろう。そのため、数学的な事実がどんな時に使えて、どんな時に使えないのか判断できないし、判断することの必要性すら感じていないかもしれない。このような状況では、目標で意図されている、数学を様々な場面で活用することはできないだろう。そこで、高等学校数学科において、数学の体系的な理解を促す授業の実現に向けた研究を進めることにした。

## 2. 高等学校数学における「体系」の取り扱い

これまで、我が国の高等学校数学において、数学の「体系」にかかわる内容がどのように取り上げられてきたのか、その歴史の変遷を調べた。

まずは、昭和26年改訂学習指導要領(試案)では、

<sup>†</sup> Tomohiko MAKINO\*, Aritaka YUZAWA\*\* and Yoshihisa KITAGAWA\*: Mathematics lesson promoting systematic understanding in high school mathematics

Keywords: systematic understanding, high school

\* School of Education, Utsunomiya University

\*\* Yaita Higashi High School

(連絡先: makino@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

表1：学習指導要領における「体系」，「体系的」の取り扱いの変遷

| 年度       | 目標     | 「公理」が含まれる科目・単元等      | 用語    |
|----------|--------|----------------------|-------|
| 昭和26     |        | 数学一般，幾何（方法の理解）       | 公理，定義 |
| 昭和30・33  | 体系・体系的 | 中心概念，数学Ⅰ 直線図形        | 公理・定義 |
| 昭和35     | 体系的    | 数学Ⅰ 数学と論証（図形 or 数・式） | 公理    |
| 昭和45     | 体系的    | 数学ⅡB 平面幾何の公理的構成      | 公理    |
| 昭和53     | 体系的    | （平面幾何はベクトル・代数幾何のみ）   |       |
| 平成元      |        |                      |       |
| 平成11     |        |                      |       |
| 平成21     | 体系的    |                      |       |
| 平成29（予定） | 体系的    |                      |       |

目標が10項目書かれているが、「体系」という言葉は見当たらない。しかしながら、「一般数学」の理解および能力の欄に、「公理・定義および定理・証明の意味を明らかにする。」が含まれている。「幾何」の指導内容にも「演繹的な推論における公理や定義の意味と，その必要とを理解する。」，「これまでに学習した基本的事実を公理としてまとめること。」，「幾何における公理や証明の役割をまとめること。」などの記述がみられる。

次に，昭和30年改訂学習指導要領，昭和33年改訂学習指導要領では，前文+具体的目標5項目その2つ目に「体系的」と「体系」が含まれている。

数学が体系的にできていること，その体系を組み立てていく考え方を理解し，その意義を知る。

これが，数学の学習指導要領に記された最初の「体系」の記述である。

また，中心概念が各科目に応じてa～fの6項目またはa～hの8項目挙げられているが，すべての科目のcに「体系だてる」が含まれる。

c 演繹的な推論によって知識を体系だてること

それに対応する記号と用語として，「公理・定義，定理・命題，証明，必要条件・十分条件・同値関係，数学的帰納法」が挙げられている。

昭和35年改訂学習指導要領では，具体的目標6項目+後文の5つ目に「体系的」と「体系」が含まれる。数学が体系的にできていることと，その体系を組み立てていく考え方を理解させ，その意義を知らせる。

また，「数学Ⅰ」の単元として，「(6) 数学と論証体系的に論理を進めていく方法を，図形や数・式を通して理解させる」が独立した。これまでの学習指導要領が幾何の内容で体系的な取り扱いを求めていたのに対し，指導上の留意点に「図形と数・式を用いて指導しても，または両者のうちいずれかを用いて指導してもよい。」とあるように，数と式の公理的な扱いが含まれる点で異なる。

昭和45年改訂学習指導要領では，総括目標+具体的目標5項目があり，その5つ目に「体系的」が含まれる。

体系的に組み立てていく数学の考え方を理解させ，その意義と方法について知らせる。

また，「数学ⅡB」の5つの目標のうち，一つ目として「体系的に理論を組み立てていく方法を，平面幾何を通して理解させる。」とあり，数・式が公理的に扱われうるのは，昭和35年度版の一度きりであったことがわかる。

昭和53年改訂学習指導要領では，目標の中に「体系的」が含まれる。

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，体系的に組み立てていく数学の考え方を通して，（後略）

しかしながら，各科目の目標や用語・記号に体系や公理の記述は見られない。

平成元年改訂，平成11年改訂の学習指導要領の目標には，「体系」という言葉は含まれない。また，各科目の目標や用語・記号に体系や公理の記述は見

られない。

そして、平成21年改訂学習指導要領の目標「体系的」という言葉が復活する。

数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、(後略)

しかし、各科目の目標や用語・記号に体系や公理の記述は見られない。次期学習指導要領でも「体系的」という言葉が含まれる。

### 3. 昭和45年改訂学習指導要領下の教科書の内容

ここでは、昭和48年5月発行の数研出版『高等学校新数学ⅡB』の中の「平面幾何の公理的構成」の内容についてみる。

「第6章平面幾何の論理的体系」の章扉には、「本章では、論理的に理論を進展させていく学問の体系を、平面幾何学を例にとって学ぶこととしよう。」と書かれているように、数学の体系が学習内容になっていることがわかる。

「第1節平面幾何の論理的体系」の第1項では「帰納と演えき」についての内容が取り上げられている。そこでは、帰納的な方法、演繹的な方法が、「三角形の内角の和の求め方」を例に示されている。そして、それぞれの方法について次のようにまとめられている。帰納的方法とは、「命題に関する具体的例をいくつか調べて、どの例についても命題が成り立つことから、その命題が正しいと結論する方法」、演繹的方法は「すでに正しいと認められている他のいくつかの命題を根拠にして、問題になっている命題が正しいことを、論理的に導く方法」である。

その後、「帰納的方法で正しいと判断されたとしても、あらゆる可能な場合につて検討されたものでない限り、立証の方法としては不完全である。」と、帰納的方法の限界が取り上げられている。一方で、「演えきの方法によって、命題の正しいことが証明されたときは、その証明の根拠となった命題が正しいものである限り、その命題も、また、正しい。数学における正しい命題は、例外なく成り立つことが必要であるから、もともと例外なく正しいと認められた命題か、またはそれらから演えきの導かれたものでなければならない。」とあるように、数学における演繹的方法の役割が取り上げられている。

第2項では、「公理」が内容として取り上げられている。次のように公理について説明している。「1つの命題の証明の根拠となる命題それ自身が真であるこ

とを証明するためには、さらに、別の根拠となる命題が必要になる。順次さかのぼると、ついには、どうしても証明なしで真であることを認めなければならないような、基本的な命題に達する。数学では、いくつかの基本的な命題を真であると約束して、推論の出発点とする。このような基本的な命題を公理という。」

そして、平面幾何の公理を4つ提示している。

公理Ⅰ 異なる2点を通る直線は、ただ1つある。

公理Ⅱ 平面上の1直線は、この平面を2つの側に分け、同じ側の2点を結ぶ線分上の点はすべて同じ側にあり、異なる側の2点を結ぶ線分はもとの直線と交わる。

公理Ⅲ 図形は、その形・大きさを変えることなく、任意の位置に移すことができる。

公理Ⅳ 直線外の1点を通り、その直線に平行な直線は、ただ1つである。

その後、中学校で学習した図形の性質との関係を取り上げ、公理から演繹的方法によって、順次証明されることになることを説明している。

第3項では、数量に関する公理の内容が取り上げられている。そこでは、線分の長さ・角の大きさ・面積等々の量に関係した性質では、数に関する四則演算や大小関係についての公理や定理がもちいられるとして、次の公理が取り上げられている。例えば、加法・乗法で閉じる、加法・乗法の交換法則、結合法則、分配法則、加法・乗法の単位元と逆元、不等号の推移律などである。

第4項では、定義について取り上げられている。そこでは、混乱や誤りが起こらないように、公理や定理などに用いられている用語や記号の意味を明確にしておかなければならない、として定義の必然性が説明されている。さらには、点、直線、平面など、無定義用語についても記載されている。

## 4. 考察

### (1) 数学教育の観点

現行学習指導要領では、公理を扱わないで数学を体系的に理解することが目標となってしまっている。また、次期学習指導要領でも、数学の体系的理解が目標に掲げられることが想定されるなかで、公理的な扱いが復活するかは不透明である。

しかしながら、数学の体系の特徴は、公理と演繹という構文論の構造と、無定義用語と定義された用語の意味論の構造にその本質があることが見て取れ

たことから、数学の体系的理解には、授業で、公理化の活動および、公理の中での無定義用語の關係の考察が必要ではないかと考える。つまり、数学的活動における体系化とは、特に幾何学においては公理化によって基礎づけられるものと考えられる。

大学の教職課程では、公理的構成について学習しているが、高校時点の学習でそのような内容の扱いを経験した教師は、今後一層少なくなる。したがって、授業者が学習指導要領の趣旨を的確に捉え、数学の知識の特徴や公理化について、正確に理解したうえで、授業を行うことが肝心である。現行の教科書の内容を超えて、現代化時の教科書の内容を踏まえた授業展開の工夫が望まれる。

今後は、高等学校数学Aの「図形の性質」における公理化活動を取り入れた授業について、具体的な指導案を検討したい。

さらに、幾何学以外の高校数学の分野で扱われる内容の公理的側面として、①集合の公理（ド・モルガンの法則）、②命題論理の公理（背理法や対偶証明法を含む）、③ユークリッド幾何学の公理（等式の性質を含む）、④ペアノの公理（数学的帰納法の原理を含む）、⑤体の公理（数の拡張における閉性）などがあげられる。具体的な内容は大学で学習するとしても、その前の段階として高校数学を位置づけ、次の学習水準を見据え授業を取り入れたい。

公理という用語が高校数学の学習指導要領からなくなったのは、昭和53年改訂以降である。しかしながら、「体系的に数学を理解する」という高校数学の特徴を実現するためには、思考活動の出発点として、無定義用語、それらの性質や関係としての公理、さらに演繹法概念とその結論としての定理の理解が必要不可欠であり、学習内容の削減が生徒の数学の理解の妨げになってはならない。

時代変化や生徒の実態に応じて、また、社会の変化や要請を見据えて内容が削減されているが、それらは本来、数学的活動などの時間に振り向けられなければならないものである。したがって、数学の体系的な理解を踏まえた公理化の内容の指導にあたっては、生徒の数学的活動に一層重点が置かれるべきであり、単に教科書の定義や教師による説明のみによってなされるものではなく、実際に生徒が、基本的な図形の性質を解析的に考察したり、定理を納得して証明したり、ある定理が成り立つ条件を解析的思考で遡って考えたり、平面幾何における背理法に

習熟したり、公理そのものを否定しても成り立つような数学（例：非ユークリッド幾何学）を考えることによって、公理化のよさをとらえることができるような授業が理想である。

例えば、球面三角形の内角の和を考えることで、教科書で学習する幾何学は、通常の平面で考えているという仮定を明確化することができる。また、高校1年生の平面図形の導入では、「三角形の内角の和が180度であることは、何を前提に証明できる？」などと発問し、遡って考えて公理の必要性・明確化を行う授業が想定できる。

## (2) 数学の観点

昭和45年度学習指導要領教育課程における教科書の内容は、単に、ユークリッド幾何学を特徴づける公理化を扱っているだけで、「公理化のよさ」が感じられる教材になっていない。高校でこのような内容が扱われれば、逆に生徒は混乱してしまうのではないか。

また、公理を扱わずに体系的な理解が求められるのであれば、現行学習指導要領での「体系的な理解」とは、どのようなことを言うのかがわからない。定理をバラバラに覚えるのではなく、ここまで戻ればあとは証明できるという理解の仕方も体系的と言える。さらに、数学的知識の構成のされ方は、すべて「 $\circ\circ$ ならば $\triangle\triangle$ 」という構造によるものだから、大本に戻って考えれば、つまり、公理的構成のよさは、その公理さえ認めれば、その公理を満たすようなあらゆる理論的体系で、定理が成り立つという点にある。

## 参考・引用文献

中央教育審議会（2016）. 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）別添資料4-1. [http://www.mext.go.jp/component/b\\_menu/shingi/toushin/\\_icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902\\_3\\_2.pdf](http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/_icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_3_2.pdf)（最終確認2017.01.25）

福原満州男（1973）. 数学ⅡB. 実教出版.

伊関兼四郎（1973）. 高等学校新数学ⅡB. 数研出版.

文部科学省（2009）. 高等学校学習指導要領解説数学編. [http://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000\\_5.pdf](http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf)（最終確認2017. 10. 29）

筑波大学数学教育研究室（2003）. 戦後学校数学の変遷（附算数科・数学科学習指導要領）.

平成29年10月31日 受理



# Mathematics lesson promoting systematic understanding in high school mathematics

Tomohiko MAKINO\*, Aritaka YUZAWA\*\* and Yoshihisa KITAGAWA\*

\* School of Education, Utsunomiya University

\*\* Yaita Higashi High School