数学的な見方・考え方の進展に関する横断的研究
―領域「関数」,「データの活用」,「図形」の内容に焦点を当てて―

牧野　智彦・日野　圭子・川上　　貴・神保　元康・田中　真也

宇都宮大学教育学部教育実践紀要　第5号　別刷

2018年8月3日

宇都宮大学教育学部教育実践紀要　第5号　2018年8月3日

数学的な見方・考え方の進展に関する横断的研究†

―領域「関数」,「データの活用」,「図形」の内容に焦点を当てて―

牧野　智彦*・日野　圭子*・川上　　貴*・神保　元康**・田中　真也***
宇都宮大学教育学部・教育学研究科*
宇都宮大学教育学部附属小学校**
宇都宮大学教育学部附属中学校***

数学的な見方・考え方の進展の観点からの算数・数学科の学習指導の課題の一端を明らかにし，小中一貫カリキュラムの開発に向けた基礎資料を作成するために，3つの領域の内容について，横断調査を実施した。その結果，「数学的な見方・考え方」の進展の様子，その進展の可能性の一端が明らかになった。

キーワード：数学的な見方・考え方，小中接続，横断的研究

1. はじめに

算数・数学科新学習指導要領では，数学的に考える資質･能力を育てることを目指し，数学的な見方･考え方を働かせて数学的活動に取り組むことが重視されている（文部科学省，2018）。数学的な見方・考え方は，長期にわたる学習を通して徐々に成長していくものである。従って，小学校および中学校を通してその成長を促すカリキュラムの開発は，喫緊の課題である。

本研究では，数学的な見方・考え方の進展を捉えるために，「関数」「図形」「統計」に関わる内容に焦点を当てて筆記調査問題を開発し，国立大学法人教育学部附属小･中学校において横断的調査を行う。それによって，算数・数学科での学習指導の課題の一端を明らかにし，小学校，中学校での一貫カリキュラム開発に向けた基礎資料を作成することを目的としている。本稿では，開発した調査問題の趣旨を述べ，調査結果の第一次報告を行う。

2. 新学習指導要領における数学的な見方・考え方

数学教育において，数学的な見方や考え方は，以前からその重要性が認識され，算数･数学科の目標，更に評価の観点として掲げられてきた。また，研究者による数学的な見方や考え方の特徴づけや分類も知られており（例えば，中島，1989；片桐，2004），数学的な見方や考え方を育てるための問題，活動，発問などの提案や実践も積み重ねられてきている。

新学習指導要領では，「数学的な見方・考え方」について次のように述べられている。

「数学的な見方･考え方」のうち，「数学的な見方」については，「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」であると考えられる。また，「数学的な考え方」については，「目的に応じて数，式，図，表，グラフ等を活用しつつ，根拠を基に筋道立てて考え，問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能等を関連付けながら，統合的・発展的に考えること」であると考えられる。以上のことから，算数科における「数学的な見方・考え方」は，「事象を，数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，根拠を基に筋道を立てて考え，統合的・発展的に考えること」として整理することができる。（文部科

† Tomohiko MAKINO*, Keiko HINO*, Takashi KAWAKAMI*, Motoyasu JINBO** and Shinya TANAKA***: Cross-sectional study on the development of mathematical thinking
Keywords: mathematical thinking, cross-sectional study

* Faculty of Education・Graduate school of Education, Utsunomiya University
** Elementary school attached to the Faculty of Education, Utsunomiya University
*** Junior high school attached to the Faculty of Education, Utsunomiya University
（連絡先：makino@cc.utsunomiya-u.ac.jp）

学省，2018, pp. 22-23）

新学習指導要領における算数・数学科の目標では，「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す」と述べられ，数学的な見方・考え方を働かせることが柱書に示されている。すなわち，先人の研究の歴史を踏まえ，更に，数学的に考える資質・能力を育てるという算数・数学科の目標に照らして，一層その重要性が明示されているといえる。

礒部（2017）は，新学習指導要領における数学的な見方・考え方を，これまでのものと比べたときの特徴として，2点を指摘する。第1は，学びに即した具体化がなされていることである。概念規定から，「着目する」「捉える」等，算数・数学の学習における思考の進め方が示されているため，授業において学習活動を構築する上での指針として，具体化に貢献できるという。また，評価の観点としても，どこを評価するかを示し，学習活動の意味づけを深める上での貢献が期待できる。

第2は，学年段階の高まりが明確なことである。各学年の内容では，「イ思考力･判断力･表現力など」でその中身が示され，各学年で働かせたい数学的な見方・考え方を焦点化している。このことは，学年毎の重点の明確化とともに，学年間，さらには，小学校，中学校，高等学校という長期を見据えての系統的な指導の充実を期待することができると述べる。各学校段階を通しての数学的な見方・考え方の高まりは，中央教育審議会の算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめの図（図1）でも明示されている。

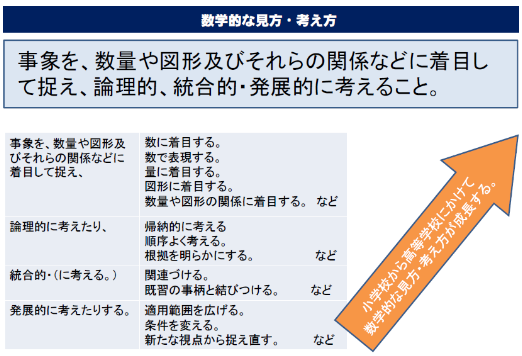

図1　数学的な見方・考え方の高まり

これらの議論に基づき，本研究は，小学校から中学校にわたるスパンで，数学的な見方・考え方がどのように成長しているかを捉えていく。そして，成長の実態の一部を見取るとともに，学習指導に対する示唆を得ようとするものである。

数学的な見方・考え方が指し示すところは幅が広い。本研究では，「関数」「図形」「統計」に関わる内容に焦点を当てて，調査問題を作成した。それぞれの内容を通して調べる数学的な見方・考え方を絞り込み，各内容について大問1問程度とした。

3. 研究の進め方

本研究では，宇都宮大学教育学部の教科教育（算数・数学）を担当する大学教員，附属小学校算数科教員，附属中学校数学科教員がチームとなって研究を進める。

まず，大学教員が提案した筆記調査の問題について，捉えたい数学的な見方・考え方が何であるか，調査の問題が児童・生徒の発達段階等からみて適切であるかなどの点について，メンバー全員で議論を重ね，調査問題を作成した。調査は2017年12月に，小学校1年から中学校2年において行った。内容によって対象とする学年や学級数は異なったが，小学校は各学年2学級，中学校は各学年4学級，合計約740名の児童・生徒から回答を得ることができた。また，収集したデータの集約は大学教員が行い，暫定的な分析結果を持ち寄って，再度，全員で検討を行った。

次節からは，各領域において，開発した調査問題と調査の結果を述べる。

4.「関数」に関わる調査の概要

（1）調査の趣旨

「関数」に関しては，「伴って変わる2つの数量の関係に着目する」，「変化や対応の特徴を考察する」，「数量の関係の特徴を基に，問題を解決する」という数学的な見方・考え方に注目した。つみ木がどんどん積まれて増えていく状況（図2）を提示し，3つの小問から調査問題を構成した。(1)

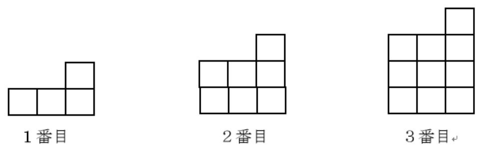

図2　調査問題におけるつみ木の絵

第1問は，4番目のつみ木の絵をかき，個数を答えるものである。ここでは，上記の数学的な見方・考え方の前提として，つみ木の積みあがり方を理解して数えているかどうかを問いかけた。なお，小学校低学年では，問題の意味を理解しやすいように，1番目～3番目の個数を答えてから4番目について尋ねた。

第2問は，番号とつみ木の個数との間にある様々なきまりを見つけて，それらをすべて書き表すものである。上記の数学的な見方・考え方では，「伴って変わる2つの数量の関係に着目する」，「変化や対応の特徴を考察する」に焦点がある。「3つずつ増える」という変化の関係は，容易に見つけることができるであろう。しかし，変化だけでなく，番号と個数の対応関係についても注意を向けるために，小学3年生からは，「○番目にはつみ木が全部で□個あります。○と□の間には，どんなきまりがありますか。」のように問いかけた。○×3＋1=□といった式がいつ頃から現れるかは，関心のあるところである。

第3問は，100番目のつみ木の個数を答えるものである。児童・生徒は，第2問で見いだしたきまりの中から，何らかのきまりを使って，100番目という大きな番号についての個数を見つけるであろう。従って，上記の数学的な見方・考え方では，「数量の関係の特徴を基に，問題を解決する」ことについての情報が得られると考えた。

(2) 結果

第1問についての正答率を表したものが表1である。

表1　4番目のつみ木の個数と絵の正答率

学年	小1	2	3	4	5	6	中1	2
個数	72%	83	88	93	97	98	96	100
絵	67	75	89	90	97	98	95	99

表1は，つみ木の個数も絵も，中1がやや下がるものの，正答率は学年が上がるにつれて上昇している様子を示している。

一方，不正解であった児童・生徒の多くは正しい絵をかくことができず，従って，個数が異なってしまっていた。3番目と同じ絵をかいている者，あるいは，「12個」「16個」という誤答があった。図3は，後者の誤答をした児童の絵である。

また，個数よりも絵の正答率が低いという傾向がみられる。特に，低学年において差がみられた（小1で5名，小2で5名が該当）。これらの児童は，1番目，2番目，3番目のつみ木の個数（それぞれ4，7，10）から，3ずつ増えていることを捉えて，13と答えたと考えられる。彼らがかいた絵は，多様であった。右上の出っ張りに引っ張られた絵，逆に，図3のようにそこに目が向かなかったり，列や段の数を把握できていなかったりする絵がみられた。これらの児童の中には，絵はかけないものの，問2では「3個ずつ増える」というきまりが書けているものもいる。

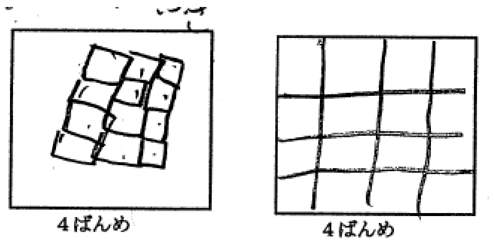

図3　間違った絵の例（共に小1）

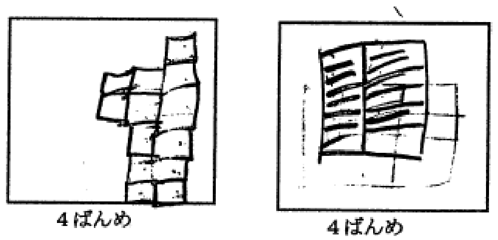

図4　13個とかいているが間違った絵の例
（左：小1，右：小2）

第2問では，みつけたきまりが複数である場合も多かった。また，想定したきまり以外のきまりを見つけている児童・生徒も多かった。

表2は，正答として想定したきまりをかいていた児童・生徒の割合を示している。変化に関わるきまりとして想定したものは，「3個ずつ増える」である。また，対応に関わるきまりとして想定したものは，「○×3＋1=□」やこれに準ずる表現である。どちらも書いている児童・生徒は，表2では，「変化・対応」の項目に分類している。表2からは，「3個ずつ増える」というきまりのみを見つけている児童・生徒は，低学年で多く，学年が上がるにつれて減少

している傾向にあることが分かる。

表2　番号とつみ木の個数の間で見つけたきまり

学年	小1	2	3	4	5	6	中1	2
変化	52%	75	37	49	18	8	4	5
対応	0	0	6	9	54	47	71	53
変化・対応	0	0	12	9	11	35	13	39

一方,「○×3＋1=□」という○と□の間の対応関係のきまりを見つけ，表現している児童･生徒は，3年から出現し，5年以降は，変化のきまり以上に対応のきまりを見つけ,表現するようになっている。また，変化と対応の両方のきまりを見つけて表現した児童・生徒も，3年以降はある程度の割合でいることも分かる。

第3問についての正答率を示したものが表3である。

表3　100番目のつみ木の個数

学年	小1	2	3	4	5	6	中1	2
個数	3%	13	46	50	74	94	90	96

表3は，小学1年が3%であったところから，中学2年での96%へと，大きな伸びを示している。このような顕著な伸びは予想していなかった。また，表3をみると，小学3年，5年，6年での伸びが特に顕著であることが分かる。

小学校の低，中学年では，多くの児童が，100番目の個数を計算するのではなく，予想して答えをかいていたと考えられる。低学年では予想の範囲は広く，ほとんど13くらいから，何千や何万など，児童は様々な数字をかいていた。中学年では，何百という数字をかく児童が殆どであった。その中で，400とかく児童が目に付いた。彼らは，1番目が4個であるため，100番目では4×100と考えたと思われる。誤った比例的推論が用いられていたといえよう。

それでも，小学1年では，2名の児童が，301個という正解を出していた。児童は，図5のように，左2つの列のまとまりと，一番右の1列のまとまりを区切り，100＋100＋101のように考えていた。

3年になると，一般化された式を用いて，100番目の個数を求める者が表れ始めた。100×3＋1＝301という式だけでなく，図を用いるなどして，第2問で見出した○，□によるきまりとの関係を表現している児童も見られた（図6参照）。

5年以降は，一般化された式を用いた計算方法も多様になっていった。1番目が4個であることを使って99×3＋4と考える児童・生徒も増えていった。中学校になると，増え方が一定（3）であることから一次関数y=3x＋aであると考え，(1, 4）を代入して，aが1であることを見出し，x＝100を求める者もいた。このように，各学年段階で学ぶ知識と関連づけた解法が見られた。

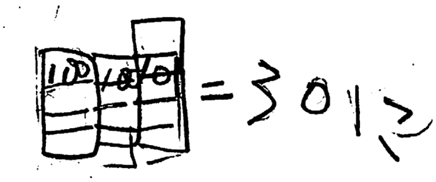

図5　100番目のつみ木の数（小1）

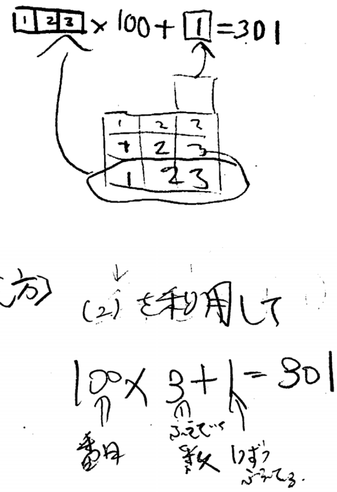

図6　図との関連の表現（共に小3）

（3）考察

まず，4番目のつみ木の個数を求める際に，絵は正しくかけていないが，数のパターンから答えを求めている児童がいることには注意が必要である。児童の中には,正解ではあっても,つみ木が積みあがっ

ていく様子を把握していない者がいることを示しているためである。

図の番号とその図でのつみ木の個数との間のきまりについては，1，2年では，対応のきまりをかいている児童がいなかった。これは，問題の記述の仕方（1，2年には，「ふえかたには，どんなきまりがありますか」と問いかけた）も影響していると考えられる。それでも，今回提示した2つの伴って変わる数量の関係については，まずは変化への注目からはじまり，徐々に対応に目が向いていくという発達の様子が確認されたと考える。これは，対応関係を一般式によって書き表すことが難しいという，パターンの一般化の先行研究とも整合した結果となっている。

更に，本調査からは，2量の対応関係の把握と式による表現が，小学5年で顕著に増加していることが分かった。2量の伴って変わる関係についての学習は小学校4年で行われ，この学年から関数的な見方・考え方の学習が始まる。本調査での4年生は，○と□を使ってのきまりの書き方がしっかりしてきた様子は見られたが，まだ変化のみを書いている児童が多かった。5年生というある一定の期間の後で，対応関係の式による表現が増えている点は興味深いところである。これは発達の傾向であるのか，それとも，5年での学習指導が影響を及ぼしているのか，更に探っていきたい。

なお，小学1年から4年の児童の中には，図のつみ木の形，つみ木の積みあがり方の特徴，つみ木を幾つかのパーツに分けての配置の特徴などを記述している者がみられた。これらの児童は，変化ではなく，つみ木の構造に目を向けている。こうした形や配置といった図の認識は，図の番号と個数との関係を見いだしていくことと関わっていると考える。実際，図5でも図の配置の特徴に基づいた計算が行われている。図の形や配列への注目が，学年間でどう進展していくかなどについても，今後探っていきたい。

100番目の図のつみ木の個数の求め方からは，児童・生徒がどういうきまりを適用しているかを知ることができる。小学1年，2年では，児童の殆どは直感に頼って数字をかいていた。これは，第2問で，これらの児童が変化（特に変数yである個数）に注目していたことを考えると自然である。なぜなら，変化のみの情報（1番増えると3個増える）から100番目の個数を割り出すのは簡単ではない。児童は直感に頼らざるを得なかったと思われる。

小学3年以降，○番目が□個であるときの，○と□の関係（対応関係）をつかむことが出来るようになってくると，その関係を使って個数を求める児童が増えてきた。しかし，100番目のつみ木の個数の正答率は，小学3年，5年，6年で顕著に上がっており，第2問で対応関係に注目する時期（小学5年）とのずれがみられた。きまりを使って問題を解くことよりも，そのきまりを明示的に表現することの方が，児童にとっては難しいのかもしれない。

5.「データの活用」における調査の概要

（1）調査の趣旨

「統計」に関しては，①「目的に応じて適切なグラフや統計的手法を選択できる」，②「複数の情報（グラフや統計的手法など）を関連づけて多面的・批判的考察ができる」という数学的な見方・考え方に注目した。それぞれの数学的な見方・考え方に関わる各学年の調査問題の趣旨は表4と表5の通りである。なお，小学校5年生は，他の研究事業との関連で今回の対象から除いている。また，調査対象である小学1年の児童は，「絵グラフ」の学習が既習であり，小学3年の児童は，「棒グラフ」の学習が既習である。一方，小学6年の児童は，「柱状グラフ」の学習が未習であり，中学1年の生徒は，「資料の活用」の学習が未習である。

表4　①の数学的な見方・考え方に関わる調査問題の対象学年とその趣旨

学年	調査問題のねらい
小1・小2	知りたい事柄に応じて観点の異なる絵グラフを選択する
小3・小4	知りたい事柄に応じて複数系列の棒グラフを選択する
小6・中1	知りたい事柄に応じて複数系列の棒グラフ，折れ線グラフ，帯グラフを選択する
中1・中2	批判的に考察し判断するための適切な根拠として，分布の傾向の特徴や統計量を選択する

表5　②の数学的な見方・考え方に関わる調査問題の対象学年とその趣旨

学年	調査問題のねらい
小６・中１	割合の概念や複数のグラフを関連づけて，多面的に考察する
中１・中２	複数の統計量や分布の傾向の特徴を関連づけて，批判的に考察する

2つの学年毎に，共通の調査問題を出題し，学年間の違いを分析できるようにした。また，学年横断的な数学的な見方・考え方の成長をみるために，学年グループが上がるにつれて，扱うデータの種類や分析の目的が異なるように出題した。①の数学的な見方・考え方に関わる調査問題では，小学1･2年は,「1つの観点を扱った質的データ」, 小学3･4年は,「2つの観点を扱った質的データ」, 小学6年・中学1年は「3つの観点を扱った質的データ」を取扱った。それに伴い，扱うグラフもより複雑なものを取扱った。②の数学的な見方・考え方に関わる調査問題では，小学6年・中学1年では,「知りたい事柄をわかりやすく表すという主に自分にとっての目的」を調査問題の文脈に組み入れたのに対して，中学1年・中学2年では,「判断の妥当性を批判的に考察するという他者も考慮した目的」を調査問題に組み入れた。

本稿では, ①の数学的な見方･考え方の中でも「目的に応じて適切なグラフを選択できる」ことに注目し，表4の小1・小2共通問題（図7）と小3・小4の共通問題（図8）に焦点をあてる。図7の調査問題は,「アサガオ調べ」の文脈を用いて，色別の絵グラフ（㋐）と曜日別の絵グラフ（㋑）を示している。第1問と第2問は，これら絵グラフから必要な情報を読み取るかできるかどうかをみる問題である。こうした「グラフから必要な情報に着目する」見方は,「目的に応じて適切なグラフや統計的手法を選択できる」見方・考え方の基礎をみるために出題した。第3問は，選択肢の中にグラフから何を知ろうとしているのかという目的を示し，その目的に適うグラフを選ぶものである。これは,「目的に応じて適切なグラフを選択できる」見方・考え方をみる問題である。前述の対象学年が低学年であることと質問紙調査としての制約から，こうした選択肢形式の出題にした。

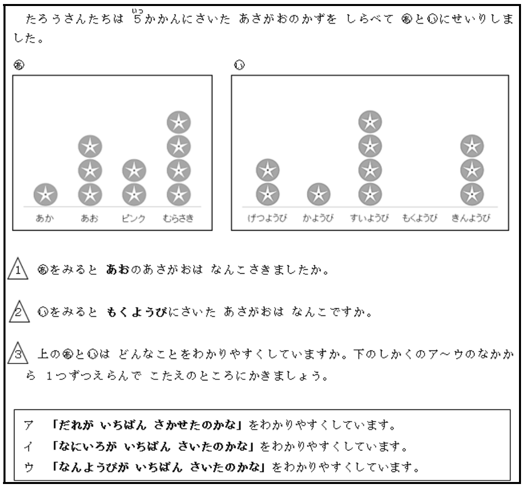

図7　小1・小2共通問題

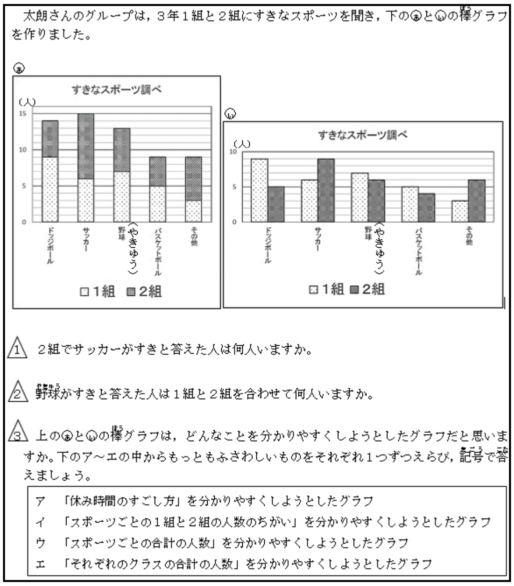

図8　小3・小4共通問題

図8の調査問題は,「好きなスポーツ調べ」の文脈を用いて，積み上げ棒グラフ（㋐）と複数系列の棒グラフ（㋑）を示している。設問の構成は，図7の調査問題と同様である。第1問と第2問は，棒グラフから必要な情報を読み取るかできるかどうかをみる問題である。第3問は，選択肢の中にグラフから何を知ろうとしているのかという目的を示し，その目的に適うグラフを選ぶものである。図7の調査問題と異なるのは，図7で示した絵グラフでは，それぞれ「アサガオの色」,「曜日」といったように1つの観点しか関わってこないのに対して，図8の棒

グラフでは,「スポーツ」と「クラス」という2つの観点が関わってくる点である。

(2) 結果

設問毎に,学年間の正答率を比較していく。なお,学年間の比率の差は,正規近似を行い,有意水準5%で両側検定で検定を行った。

はじめに,図7の小1・小2共通問題の結果について示す。図7の第1問および第2問についての正答率を表したものが表6である。

表6をみると,第1問および第2問において,どちらの学年も9割を超える高い正答率を示していることが分かる。なお,どちらの問題においても,学年間の比率に有意差はみられなかった。こうしたことから,「グラフから必要な情報に着目する」見方に関して,調査対象の小学1・2年の児童の殆どが,身についていることが窺える。

表6　図7第1問および第2問における正答率

項目＼学年		小1 (n=67)	小2 (n=69)
第1問	正答 (3こ)	63 (94%)	68 (99%)
	誤答	4 (6%)	1 (1%)
第2問	正答 (0こ)	65 (97%)	68 (99%)
	誤答	2 (3%)	1 (1%)

また,図7の第3問についての正答率を表したものが表7である。

表7　図7第3問における正答率

項目＼学年		小1 (n=67)	小2 (n=69)
第3問あ	正答 (イ)	59 (89%)	64 (93%)
	誤答 (ア)	5 (7%)	4 (6%)
	誤答 (ウ)	2 (3%)	1 (1%)
	無回答	1 (1%)	0 (0%)
第3問い	正答 (ウ)	57 (86%)	68 (99%)
	誤答 (イ)	5 (7%)	1 (1%)
	誤答 (その他)	4 (6%)	0 (0%)
	無回答	1 (1%)	0 (0%)

表7をみると,あおよびいにおいて,どちらの学年も85%を超える高い正答率を示していることが分かる。また,学年間を比較してみると,第3問あでは,学年が上がるにつれて正答率が4ポイント上昇していることが分かる。ただし,学年間の比率に有意差はみられなかった。一方,第3問いでは、学年が上がるにつれて正答率が13ポイント上昇していることがわかる。学年間の比率に有意差がみられた。これらのことから,「知りたい事柄に応じて観点の異なる絵グラフを選択する」数学的な見方・考え方は,調査対象の小学1・2年の児童の殆どが,一定程度身についていることが窺える。

次に,図8の小3・小4共通問題の結果について示す。図8の第1問および第2問についての正答率を表したものが表8である。

表8をみると,第1問および第2問において,どちらの学年も85%を超える高い正答率を示していることが分かる。なお,どちらの問題においても,学年間の比率に有意差はみられなかった。こうしたことから,「グラフから必要な情報に着目する」見方に関して,調査対象の小学3·4年の児童の殆どが,一定程度身についていることが窺える。

表8　図8第1問および第2問における正答率

項目＼学年		小3 (n=66)	小4 (n=71)
第1問	正答 (9人)	56 (85%)	62 (88%)
	誤答(10人)	4 (6%)	6 (8%)
	誤答 (その他)	5 (8%)	3 (4%)
	無回答	1 (1%)	0 (0%)
第2問	正答(13人)	59 (88%)	66 (93%)
	誤答(14人)	3 (5%)	1 (1%)
	誤答 (その他)	3 (5%)	4 (6%)
	無回答	1 (2%)	0 (0%)

また,図8の第3問についての正答率を表したものが表9である。

表9　図8第3問における正答率

項目＼学年		小3 (n=66)	小4 (n=71)
第3問あ	正答 (ウ)	59 (89%)	57 (81%)
	誤答 (ア)	0 (0%)	3 (4%)
	誤答 (イ)	4 (6%)	6 (8%)
	誤答 (エ)	3 (5%)	5 (7%)
第3問い	正答 (イ)	59 (89%)	57 (81%)
	誤答 (ア)	0 (0%)	2 (3%)
	誤答 (ウ)	2 (3%)	6 (8%)
	誤答 (エ)	5 (8%)	6 (8%)

表9をみると，㋐および㋑において，どちらの学年も8割を超える高い正答率を示していることが分かる。また，学年間を比較してみると，どちらの問題においても，8ポイント減少していることが分かる。ただし，どちらの問題も，学年間の比率に有意差はみられなかった。これらのことから，「知りたい事柄に応じて複数の観点が入った棒グラフを選択する」数学的な見方･考え方は，調査対象の小学3･4年の児童の殆どが，一定程度身についていることが窺える。

（3）考察

限られた標本サイズのため，調査結果を一般化することができないが，調査の結果から，以下の2点が分かった。第1に，「グラフから必要な情報に着目する」見方については，調査対象の小学1年から4年までの児童の殆どが，一定程度身についていることである。特に，図8の第1問は㋑の複数系列の棒グラフの方が数量をよみとりやすく，第2問も㋐の積み上げ棒グラフの方が数量をよみとりやすい。第1問を㋐の積み上げ棒グラフから答えようとすると，積み上げ棒グラフの部分のよみとりが必要となるわけである。「資料の活用」領域を学習していない中学3年生を対象に調査した小口・青山・藤井（2012）は，こうした積み上げ棒グラフの部分をよみとることは必ずしも容易ではないことを明らかにしている。こうした先行研究の知見を踏まえると，図8の第1問と第2問の85％を超える高い正答率は，児童が数量をよみとりやすいグラフを適切に選択できている可能性も示唆している。

第2に，「目的に応じて適切なグラフを選択できる」見方・考え方については，調査対象の小学1年から4年までの児童の殆どが，一定程度身についていることである。更に，観点が増えていくといったデータが複雑になっていっても，それに応じたグラフを選択できるといった，学年進行に伴ってグラフの選択に関わる数学的な見方・考え方が成長していく可能性が窺える。

小学校の統計に関する能力の必要性と達成度を小学校教員を対象に質問紙調査を行った中西ほか（2010）では，「目的に応じて表やグラフにまとめることができる」能力に関して，調査対象の9割以上の教員が必要性を認識しているものの，その能力の育成が自身の学校で「十分に」，「まあ十分に」達成されていると回答したのは，調査対象の約6割に留まったという結果を示している。また，本研究における調査実施校の教員に伺ったところ，小学1年生から「目的に応じてグラフを選択する」ことや「グラフの特性」については，意識して指導しているという。更に，調査実施校で扱っている算数教科書の第3学年には，積み上げ棒グラフと複数系列の棒グラフが取り上げられており，「どんなことをわかりやすくしたいと考えてかいたグラフでしょうか」を問う設問があり（坪田・金本ほか，2016，p.78），授業でも時間を設けて指導したという。

こうした先行研究からの知見や調査実施校の教員からの情報を踏まえると，「目的に応じて適切なグラフを選択できる」見方・考え方については，小学1年から授業の中で計画的に取扱っていくことで，その育成と一定の成長が期待できるのかもしれない。グラフの選択に関わる数学的な見方・考え方についての児童の実態と成長については，今度更に追究していく必要がある。

6.「図形」における調査の概要

（1）調査の趣旨

「図形」については，「発展的に考える」，「論理的に考える」という数学的な見方･考え方に着目した。

調査問題では，場面説明として，「正方形」のとき，2本の対角線によって分割された4つの三角形を外側に開くと正方形ができることを提示した。

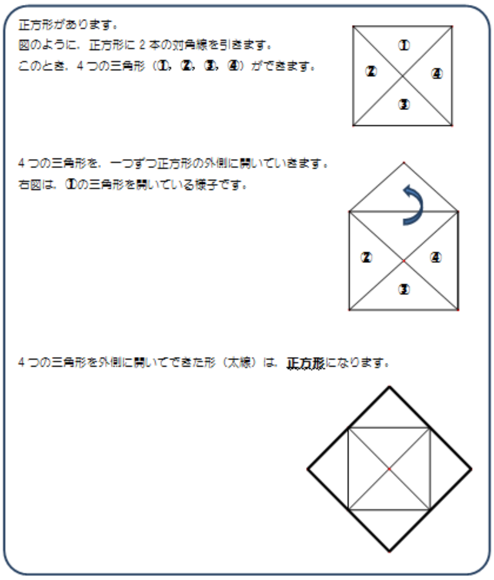

図9　調査問題の導入部分

「発展的に考える」見方・考え方を働かせる場面として，最初の図形を「正方形」から「長方形」に条件を変える状況を設定した。正方形の時と同じように，長方形の2本の対角線によって分割された4つの三角形を外側に開いたときに，どのような形ができるかを問うことにした。

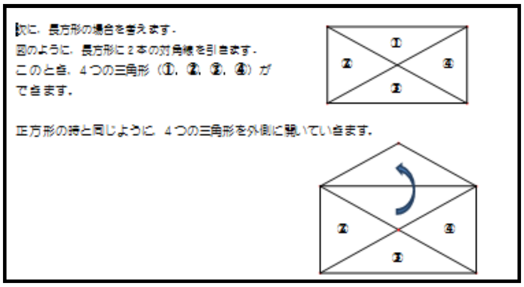

図10　正方形から長方形に条件を変えた状況

設問1では，長方形のときに，長方形の外側にできる形の名称を書き，その理由を答える問題である。このとき，形の名前がわからない場合は「絵」で解答するように指示をした。

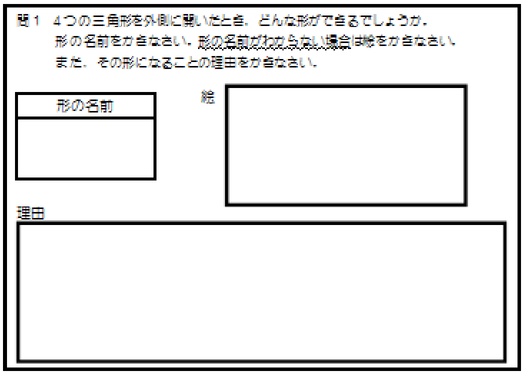

図11　設問1の解答用紙

そして，設問2では，さらに「発展的に考える」見方・考え方の様子を調べるために，「このあと，あなたはどんなことを調べたいですか」という問題を出題した。

同一の調査問題を，附属小第4学年，附属小第5学年，附属小第6学年，附属中学校第1学年，附属中学校第2学年の児童・生徒に実施した。本稿では，設問1の「形の名前」とその理由について，附属小第5学年67名，第6学年67名，附属中第1学年78名，附属中第2学年77名の結果を報告する。

(2) 結果

設問1の「形の名前」の主な結果は次の通りであった。

表10　形の名前の主な解答

	小5 (N=67)	小6 (N=67)	中1 (N=78)	中2 (N=77)
ひし形	39	59	63	56
平行四辺形	6	3	9	8
長方形	5	0	0	0
正方形	8	5	0	4

小学校5年生で「ひし形」と解答したのが39名（58.2%）であった。小学校5年生は色々な四角形を解答しているのが特徴である。中でも，「長方形」と解答したのが小学校5年生だけであった。また，「正方形」と解答した人数も他の学年よりも多かった。そして，「形の名前」を解答していない児童も6名であった。

小学校6年生で「ひし形」と解答した児童は59名（88.1%）であった。小学校5年生よりも解答率が上がっていた。そして，「平行四辺形」，「正方形」と解答する児童は存在するが，小学校5年生よりは少なくなっている。小学校6年生で「形の名前」を書かなかった児童は0名であった。

中学校1年生で「ひし形」と解答した生徒は64名（82.1%）で，小学校6年よりも解答率が低くなった。一方で，「平行四辺形」と解答した生徒が9名で，他の学年よりも多かった。「形の名前」を書かなかった生徒は4名いた。

中学校2年生で「ひし形」と解答した生徒は56名（72.2%）で，中学校1年生よりもさらに解答率が低くなった。「平行四辺形」と解答している生徒が8名，「正方形」と解答した生徒が4名であった。また，「形の名前」を書かなかった生徒は8名と，他の学年よりも多かった。

次に，なぜその形になると考えたのか，その結果についてみてみる。「ひし形」になることを説明するには，「①4つの三角形を開くと四角形になる」（以下，条件①と記す）と「②4つの辺の長さが等しい」（以下，条件②と記す）の2つが条件になる。しかし，この2つの条件を満たした解答は中学校2年生の4名だけであった。児童・生徒は，「正方形」の場面も影響して，そもそも4つの三角形を開くと四角形

になることは前提として考えているかもしれないので，今回は，条件①がなくても，条件②があれば正答にすることとした。

小学校5年生で，「ひし形」と解答して，その理由に，条件②を記述した児童は6名だった。しかし，6名のうち2名は条件②になる根拠は記述していないので，正答から外した。例えば，「全て開くと，4つの辺の長さは同じになります。」(557)，「4つの線の長さが等しい。」(563)。なお，1名は「できあがった四角形の対角線が直交する」(549) ことを使って，「ひし形」になることを説明していた。したがって，小学校5年生で設問1の正答者は5名であった。

小学校6年生で，「ひし形」と解答して，その理由に条件②を記述した児童は14名だった。しかし，そのうち6名は記述が不十分であった。結果，小学校6年生の正答者は8名であった。この中で，条件①と条件②を記述した児童は2名であった。

中学校1年生では，14名が条件②を記述していた。そのうち4名が記述が不十分であった。その結果，中学校1年生の正答者は10名であった。

最後に，中学校2年生では，25名が条件②を記述し，そのうちの4名が不十分な記述だった。その結果，中学校2年生では21名だった。そして，条件①と条件②を記述した生徒は4名であった。

以上をまとめると，次の表の通りである。

表11　「理由」の正答数

	条件②を記述した総数	不十分な説明	正答数（＋条件①）
小5	6	2	5（0）
小6	14	6	8（2）
中1	14	4	10（0）
中2	25	4	21（4）

「形の名前」で「ひし形」と解答した割合は小学校6年生をピークに，学年が進むごとに減少していた。しかし，この結果から，「ひし形」と解答して，その理由まで正しく記述できる数は，学年進行に伴って上昇していることがわかる。

さらに，児童･生徒の「理由」を分析するために，解答にコードを付けた。自由記述を，5つの観点ごと，すなわち【操作】，【長方形の性質】，【できた四角形】，【三角形】そして，【正方形】でコード化した。

まず，【操作】に関する主なコードの出現数は次の通りであった。

表12　操作に関するコード

	小5	小6	中1	中2
開く	18	26	12	14
書く	4	6	1	2
対称	0	2	3	5
開くと直線	3	2	2	6

コード【開く】では「開けば，そうなる」，コード【書く】では「書いたら，なった」などが含まれいている。操作を根拠に持ってくるのは，中学校よりも小学校の方が多い様子がみられる。コード【対称】について，小学校5年では「対称」を学習していない。したがって，小学校5年では「対称」という言葉を記述しなかった。このように，児童・生徒の学習状況が影響を与えていることがわかる。

コード【開くと直線】は，できあがる形が四角形になることに言及したものである。4つの三角形を外側に開いたときに，長方形の頂点のところが直線になれば四角形になることの説明になる。多くの児童・生徒が「できる形が四角形になる」ことを暗黙のうちに認めている中，「四角形になるかどうか」を確かめる必要性を感じている児童・生徒がいることがわかった。

次は，長方形の性質に関するコードである。長方形に2本の対角線を引くという状況なので，長方形の性質として，対角線の記述が多く見られた。

表13　長方形の性質に関するコード

	小5	小6	中1	中2
対角線の長さが等しい	3	4	6	5
対角線が4分割	4	5	3	17
対角線が直交しない	0	0	5	5
長方形の角が90°	3	2	3	5

中でも，対角線の長さに関するコード（【対角線の長さが等しい】，【対角線4分割】）が多く出現した。また，小学生では見られなかったが，中学生では「対角線の交角」に関するコードが出現した。

一方で，コード【長方形の角が90°】が，「対角線」に関するコードに比べると少なかった。【長方形の角が90°】は【開くと直線】と関連が強く，【長方形の角が90°】を【開くと直線】の根拠に使っていた。

次は，できた形が「ひし形」であることの根拠に関するコードである。

表14　できた四角形に関する主なコード

	小5	小6	中1	中2
4つの辺が等しい	10	16	17	27
対角が等しい	3	5	18	12
対角線が直交する	4	4	8	9
小さい図形をつなげる	3	8	7	8
四角形の一辺が長方形の対角線と等しい	0	3	3	7
四角形になる	3	2	2	10

「ひし形」である理由の根拠として，ひし形の定義に言及するコードが多く出現していた。しかし，中学生の方が，コード【対角が等しい】，【対角線が直交する】が多く出現している。中学校1年生では，コード【対角線が等しい】の方が，コード【4つの辺の長さが等しい】よりも多く出現した。

また，コード【小さい図形をつなげる】は小学校6年生以降で同じぐらい出現する。これは，「4つの三角形を開くとひし形が4つできる。4つのひし形をつなげれば，1つの大きなひし形になる」というものである。児童・生徒がこのように考える背景には，小学校の図形学習での「敷き詰め」の経験があると考えられる。

コード【四角形の一辺が長方形の対角線と等しい】は，「もとの図形」と「できあがった図形」との関係を表すものである。したがって，関係を示す「論理」が必要になる。中学校2年生ぐらいにならないと，「論理」を使って，「もとの図形」を「できあがった図形」に変形するのは難しいのかもしれない。

コード【四角形になる】については，コード【開くと直線】とコード【長方形の角は90°】と関連が強い。その中で，中学校2年生の中には，「四角形になる」ことを表明しているが，その根拠を明示していない生徒も数名いる。

表15は，三角形に関する主なコードである。

表15　三角形に関する主なコード

	小5	小6	中1	中2
合同・同じ形	13	16	20	17
2種類の三角形	3	4	10	7
二等辺三角形	2	7	7	7
2種類の角	0	0	3	1

小学校5年生で，合同を学習するので，コード【合同・同じ形】は全学年で多く出現している。また，コード【2種類の三角形】とコード【2種類の角】から，中学生になると多く出現してくる。2本の対角線によって分割される4つの三角形すべてが合同か，そうでないかが，「できあがった形」に影響を与えると考えている児童・生徒がいて，中学生の方がその傾向が強いと考えられる。これは，場面提示の「正方形」の場合に影響を受けている可能性がある。

「正方形」の影響を受けている角かを見るために，正方形に関する主なコードを調べてみた。

表16　正方形に関する主なコードの出現数

	小5	小6	中1	中2
正方形との比較	4	17	14	15
角が90°ではない	2	5	4	5
対角線の長さが違う	3	2	1	6

コード【正方形との比較】の数が示すように，「ひし形」になる根拠を，ひし形の定義ではなく，「正方形との違い」としている点が興味深い。内容としては，「できあがった四角形の角が90°ではない」や「できあがった四角形の対角線の長さが違う」から，「正方形ではないので，ひし形である」と結論付ける解答が見られる。

最後に，若干名だったが，「類比」を使って，できあがった形を考えた児童・生徒もいた。これも，場面提示の「正方形」の例が影響を与えていると考えられる。

表17　コード【類比】の出現数

	小5	小6	中1	中2
類比	3	0	2	1

(3) 考察

まずは，「できあがった形」が「ひし形」であることの理由として，ひし形の性質を根拠にしている印象が強く残った。例えば，「向かい合う角が等しい」などがその典型である。こう考えると，「4つの辺が等しい」，「対角線が直交する」についても，ひし形の性質という認識で，根拠に使っている可能性はある。中学校2年生での証明の学習以前での，「論理的に考える」見方・考え方の実態を把握することができた。中学校2年生での証明学習を通して，定義，あるいは定義と同値な命題を根拠とすることの理解を促すことで，「論理的に考える」見方・考え方を進展させていく必要性を強く感じた。

「発展的に考える」場面設定として，正方形の場合を例示して，長方形の場合について考えてもらうことに

した。場面設定の影響もあって，ひし形であることの根拠として，「正方形との違い」を使う児童・生徒がいて，大変興味深い結果であった。表16を見ると，定義などを使うのではなく，類似の図形との「違い」を根拠に判断していた。正方形であれば2本の対角線の長さは等しいが，できあがった形は縦の対角線よりも，横の対角線の方が長いから，正方形ではない。だから，ひし形になると記述した児童・生徒は多くいた。このような児童・生徒は，ひし形は，正方形をつぶした形であるというイメージを持っているかもしれない。このように，図形の「イメージ」が根拠の基になっている可能性は高い。

一方で，類似なものとの違いを根拠にすることは，児童・生徒が普段の生活で使う説明の様式なのかもしれない。児童・生徒にとってはその方が納得できると考えていることが推測される。ただ，これが数学における証明学習の大きな障害となっている。というのも，児童・生徒にとって，日常生活で受け入れられる「論理」はわかりやすいので，それで十分なのである。しかし，その「論理」は，数学の世界の「論理」としては受け入れられないのである。「論理的に考える」見方・考え方の進展を考える上では，児童・生徒は，「イメージ」を根拠に使うこと，日常よく使う「論理」の方が納得がいくことを認めていく必要がある。

「発展的に考える」見方・考え方の進展においては，発展させる前に関する情報や，それまでの学習や経験が，発展させた後の思考や行為に影響を与える可能性があることも認識しておく必要がある。つまり，発展させる上での障害にもなり得るし，発展させる上で有効に機能する場合もあることは想定される。例えば，4つのひし形をつなげれば，1つの大きなひし形になるという考えは，「しきつめ」の経験が影響していると考えられる。しかし，「ひし形」であることの根拠としては不十分であり，「しきつめ」の経験が障害になっているといえる。

「論理的に考える」見方・考え方の進展は「根拠」の質の洗練として捉えることができる。【長方形の角は90°】と【開くと直線】，さらには【四角形になる】のコードの関連が強いことがわかった。4つの三角形を開いたときに直線になる，すなわち「四角形になる」のは，もとの四角形の4つの角がすべて90°でないといけないことがわかる。これがわかると，最初の四角形が「平行四辺形」，「ひし形」，「台形」，あるいは「不等辺四角形」のとき，今回と同様に4つの三角形を開いても四角形にはならないと，すぐに判断ができる。説明の「根拠」には，児童・生徒の「イメージ」や「経験」に基づくものから，類似のものとの違いに基づくもの，数学的な定義，さらには，類似の事象の構造など，様々なものがある。「論理的に考える」見方・考え方の進展では，根拠の質の向上が必要なのではないだろうか。

7. まとめと今後の課題

本研究の目的は，数学的な見方・考え方の進展の観点からの算数・数学科の学習指導の課題の一端を明らかにし，小中一貫カリキュラムの開発に向けた基礎資料を作成することであった。そのために，領域「関数」，「データの活用」，「図形」に関する内容について，小学校から中学校までの横断的調査を実施した。本稿では，各領域での横断的調査の結果の一部の報告を行い，結果について考察した。

調査結果から，各領域に関わる「数学的な見方・考え方」の進展の様子をはじめ，学年進行に伴うその進展の可能性の一端が明らかになった。数学的な見方・考え方の成長を促すカリキュラムを開発する上で，貴重な情報が明らかになりつつある。

今回は調査結果の第一次報告であった。今後は，調査結果の分析を進めていくとともに，数学的な見方・考え方の進展の様相をより丁寧に捉えるために，縦断的調査の視点も盛り込んだ調査計画を策定し，実施したい。

参考・引用文献

片桐重男.（2004）.『数学的な考え方の具体化と指導：算数・数学科の真の学力向上を目指して』明治図書.

中島健三.（1989）.『算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察（第二版）』明治図書.

文部科学省.（2018）.『小学校学習指導要領（平成29年告示）解説算数編』日本文教出版.

中西寛子・大森拓哉・竹内光悦・深澤弘美・山本義郎.（2010）.『小学校および中学校における統計教育 追跡調査 調査結果報告書』

小口祐一・青山和裕・藤井良宜.（2012）.「中学校第3学年の生徒のグラフの読み取りに関する実態調査」.日本数学教育学会誌，94（7），2-10.

坪田耕三・金本良通ほか.（2016）.『小学算数3上』教育出版.

平成30年3月30日 受理

Cross-sectional study on the development of mathematical thinking

Tomohiko MAKINO, Keiko HINO, Takashi KAWAKAMI, Motoyasu JINBO
and Shinya TANAKA