比例・反比例の授業における数学的談話の構成
―学習軌道からみた授業中の発話の考察（2）―

日野　圭子

宇都宮大学教育学部教育実践紀要　第5号　別刷

2018年8月3日

宇都宮大学教育学部教育実践紀要　第5号　2018年8月3日

比例・反比例の授業における数学的談話の構成†
―学習軌道からみた授業中の発話の考察（2）―

日野　圭子*
宇都宮大学大学院教育学研究科*

This paper is the continuation of analysis by Hino（2018）. It examines in what ways the teacher and the students look at the discursive objects in the lessons on inverse-proportional function from the viewpoints of covariation and correspondence between two quantities. In doing so, the paper distinguishes different qualities of reasoning（stage ①－⑥）on covariation and correspondence and uses them as codes for the utterances during the lessons（mainly the whole-class interactions）. The viewpoint of correspondence dominated in the lessons. Nevertheless, as for covariation, the teacher and the students repeatedly talked about non-constancy of speed for inverse-proportional functions（stage ③）by looking at the dynamic formation of graph by GeoGebra. Concerning correspondence, stage ⑥ that accompanies an advanced use of mathematical expressions was observed repeatedly. One such occasion was when the class discussed reasons for the particular characteristics of graph of inverse-proportional function by using “xy=a.”

キーワード:　数学的談話，学習軌道，比例・反比例

1．はじめに

本研究の目的は，小学校から中学校への学習の円滑な接続を視野に入れて，中学校1年の関数に関わる授業をデザインすることである。特に，本研究では，「比例と反比例」の単元において，小学校高学年で学んできた比例，反比例を振り返り，関数的な見方で見直していくための手立てを考案し，デザイン実験を行ってきた（日野，2016; 日野，2018)。

現在，2校で実施した第二サイクルのデザイン実験のうちの1校（1クラス）について，考察を行っている。日野（2018）では，比例・反比例の単元を通して行った授業実践の中で，比例の内容（第1時～第12時）において，変化と対応に関わる授業中の発話の様相を考察した。本稿では，後半の反比例の内容（第13時～第20時）に対して，同じ枠組みを用いて分析を行う。

† Keiko HINO*: Construction of mathematical discourse in the lesson of proportional/inverse-proportional function
Keywords: Mathematical discourse, Learning trajectory, Proportion, Inverse-proportion
* School of Education, Utsunomiya University
（連絡先：khino@cc.utsunomiya-u.ac.jp）

2．研究の視点

(1) 比例・反比例における談話の移行

本研究では，授業における談話（discourse）に着目している。比例，反比例ともに，生徒は小学校で既に学習してきている。小学校では正の範囲のみが扱われている。また，比例，反比例が成り立つ具体的な場面を中心として，比例と反比例の特徴が，表，式，グラフにおいて個別に学習されている。それに対して中学校では，関数の言葉が導入され，変域や比例定数が負を含めて拡張される。また, 比例，反比例が式によって定義されるところも小学校との違いである。

このように，中学校の比例・反比例の授業では，新しい談話への移行が行われている。Sfard（2008）の数学的談話の捉え方によれば，新しい語彙が導入され，表やグラフの視覚的な媒介の道具にも，正負への拡張を通して修正が加わる。また，比例，反比

例に関するナラティブが増えたり，再構成が行われたりしていくであろう。更に，生徒の比例や反比例に関わるルーチンにも修正が加わっていくと考えられる（例えば，比例かどうかを判断する根拠が，変化のパターンから，式による定義を満たすか否かへと変わる)。

日野（2018）では，新しい談話への移行をみていく手がかりを，関数の典型的な見方である「変化の見方」と「対応の見方」に求め，生徒が授業中の様々な活動の中で，対象にしている事象について，変化や対応の側面からどうみて，どう語っているかに着目した。比例の変化についての語り方では，一つの量についてのみを話したり，変化する方向（増える，減る）を話したり，あるいは，単位量当たりの大きさを話したりするなど，小学校とあまり変わらない語り方がみられた。その一方で，スピードやペースといった発話が見られたことからは，GeoGebraを取り入れたことの影響が推察された。

対応についての語り方も，小学校と同様に，表をうめたり，表でy÷xが一定となることを話したりすることが中心であった。一方，関数かどうかを判断したり，式とグラフの関係をまとめたりする中学校特有の活動があり，そうした中では，生徒は対応についての新たな語り方に出会っていた。例えば，「xが決まればyがただ1つ決まるから関数だ」，「比例定数が正だと，比例のグラフは右上がりになる」といった語り方である。

本稿では，比例に引き続き，反比例の授業での様々な活動の中で，対象にしている事象について，変化や対応の側面からどうみて，どう語っているかを見ていく。

(2) 比例・反比例における学習軌道

日野（2017）では，Carlson et al.（2002）やEllis et al.（2016）の先行研究に基づき，中学校1年の比例・反比例の学習において，以下のような生徒の推論（「比例・反比例の学習軌道」と呼ぶ）を区別した。①～④は伴って変わる2量の変化についての異なる質の推論であり，⑤と⑥は2量の対応についての異なる質の推論である。なお，ここでの「段階」は，Ellis et al.（2016）に倣い，ある特徴が継続して見られるような期間を指している。

＜変化について＞

①伴って変わる2量の調整が行われる以前の段階：2つの量が伴って変わるということのイメージをまだ持っていない。

②伴って変わる2量の調整が始まる段階：2つの量が伴って変わることのイメージを持ち始める。2つの量が意識され，また，2量の最初の調整の仕方として，方向の言葉や，限定された範囲において，ある変数の変化の大きさを他の変数の変化の大きさと比べるような言葉が出始める。

③累加ベースの共変的な推論の段階：ある変数の変化の大きさが1のときに，他の変数の変化の大きさがどうなっているかをイメージしていく。

④チャンクによる共変的な推論の段階：ある変数の変化の大きさが1以外についても，再単位化を行うことで，他の変数の変化の大きさを柔軟にイメージしていく。割合を明示的に使うことを伴い，累加ベースのイメージに頼らなくなる。

＜対応について＞

⑤手続きベースの対応的な推論の段階：2つの変数の間の対応のきまりによって結び付いた個々のxの値とyの値のペア（あるいはペアの離散的な集合）をイメージしていく。xの値から，手続きに従ってyの値が求められる。

⑥対応的な推論の段階：2つの変数の間の対応関係を，全体を見通してイメージしていく。式に現れる定数（a）が，xからyを作っていく上で，どのような影響を与えているかが分かる。表やグラフによる表現でも，y/x，xyが常に一定になっていることを使って考えることができる。

ここで，①，②は，③以降に先んじると考え，③は④に，また，⑤は⑥に先んじると考える。しかし，Ellis et al.らの研究で明らかにされていることを受け，③④と⑤⑥の間に順序は付けていない。共変的な推論と対応的な推論は互いに影響し合いながら，同時に進展していくと考える。

3. 反比例の授業実践

本稿で考察する反比例の授業実践は，栃木県内の公立中学校（1年生1クラス）で，2016年11月～12月に行われた。表1は，実施された授業（第13時～第20時）の概要である。

日野（2018）で述べたように，授業では，次の3つの手立てを取り入れた。

ア．GeoGebraを使用する

イ．「比例一族」「反比例一族」「関数一族」という擬人化モデルを利用する

ウ．図を使って関数，比例，反比例の集合の関係を書き込みながら進める

アについては，教室前方の大型テレビ画面に，グラフを中心にしたGeoGebraのアプレットを映し出し，点が動いてグラフを作り出していく様子や，表や式とグラフが連動している様子を生徒に見せていった。こうした提示は毎時間のように行われた。その他に，第18時の課題ではタブレットを使い，グループ活動時に生徒自身によるGeoGebraの操作を取り入れた。そこでは，1組の数対，また，グラフから式を求める課題において，生徒が考えた式が合っているかを確かめるためGeoGebraを使った。生徒は，式を入力し，その式に基づいて現れた点が，ある座標を通るかどうか，あるいは，あるグラフをなぞるかどうかをみて，入力した式があっているかどうかを確認した。

イについては，反比例一族を，比例一族とは異なる特徴を持った一族として，第13時に導入した。同時にウによって，比例一族，関数一族との関係を書き込みながら学習を進めていった（図1を参照）。

教師は，「比例一族は…」「比例君が登場するよ」「反比例君が走る」のように，比例や反比例を主語にして語っている様子がみられた。また，教師は，「比例一族」を比例の集合体，「比例君」「比例ちゃん」等の言い方を個々の比例と区別して話していた。しかし，生徒にそのような区別が伝わっていたかは疑問である（生徒Tukaは，第20時の終わりに，なぜ教師は，「比例君」「比例ちゃん」といっているのかが分からないとつぶやいていた）。

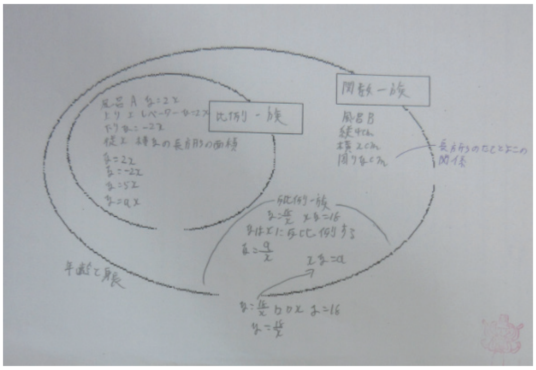

図1　集合の関係図（生徒のノートより）

表1：反比例の授業実践の概要（日野，2018より再掲）

時	内容	主要な活動
・反比例		
13	反比例の導入と復習	横一定のとき縦と面積の関係を調べる。次に縦一定に，最後に面積一定にして，残りの2つの関係を調べる。反比例一族を書き込む。
14	反比例のグラフの復習。判断の問題練習	面積一定のときの縦と横の関係をグラフに表す。比例，反比例かどうかを判断する練習問題。
15	反比例の場面で変域・比例定数を負の範囲に拡張	上り・下りエレベータの場合を参照しながら，負の範囲に拡張したときに反比例の関係が成り立つかを調べる。反比例一族に書き込む。
16	反比例の式とグラフの関係	書いてきた複数のグラフをもとに，反比例の式とグラフの関係を考える。発表された関係を反比例一族に書き込む。
17	比例と反比例のグラフ，表→式	反比例の式とグラフの関係の続き。比例と反比例のグラフも比べる。その後，表から反比例かどうかを判断して式を求める。
18	グラフ→式	タブレットを使って，グループで，グラフから式を求める課題をする。
・比例・反比例の応用		
19,20	身の回りの問題解決	身の回りに隠れている比例一族，反比例一族等を見つける方法を考える。反比例の関係を使って身の回りの問題解決をする。

4．変化，対応に関わる授業中の発話の様相

ビデオカメラによって記録したデータから，授業過程の概要を作成し，変化や対応に関する教師や生徒の語りに注目して，探索的に分析を進めた。本節では，日野（2018）と同様に，変化や対応についての発話（主に，一斉の場面での発話）をピックアップして学習軌道の段階付けを行い，どのような様相が見られたかについて述べていく。

(1) 変化に関わる発話について

①～③の段階が観察された。但し，どの段階が適切であるか迷う場合もあった。以下は，段階付けで分類した発話の例である。

①：「だんだん横になっていく」，「幅が小さくなる」（第14時）

②：「（教師）yの値が小さくなるほど右に行く（xが大きくなる），…数量的には，減少する，増

加する，と言います」（第17時）

③：「（表で，xの値が2倍になると，yの値も2倍になっていないことを確認する）」「（一方が2倍，3倍になると，もう一方は1/2倍，1/3倍になることを確認する）」（第13時），「速さが一定でない」（第14時），「ゆっくりで，速くなる」（第15時），「カーブの緩やかさ」（第16時），「最初ゆっくりで出現」（第17時），「1/4時間にするので，1は4倍して4本になる」（第20時）

段階①について

伴って変わる2つの量の調整がまだ行われていない段階が段階①である。1つの量の変化が注目され，その変化を質的に表現したり，数値によって表現したりする。反比例の授業では，第14時に，この段階が確認された。

グラフ用紙に，面積が18cm^{2}になる長方形の横xと縦yの関係について，（x, y）をプロットしていくときに，その点からx軸，y軸に垂線を引くと，1つの長方形が出来る。ここで､生徒からは「おおー」という声が上がった。その後生徒は各自で他の点もプロットし長方形をグラフ上に次々に作っていった。教師からは気付いたことを挙げるようにという要求があったが，長方形の形が，点の大きさに従ってどう変化していくかについての発言が多かった。生徒は，形の変化に注目をし，発言していた。

段階②について

伴って変わる2量の調整が始まる段階②では，変化の方向を示す言葉や，1つの数量の変化の大きさを他の数量の変化の大きさと比べる言葉が出てくる。第17時に，この段階に分類できる発話が確認された。

比例の授業では，第8時に，比例の式とグラフの関係について，生徒がグループで調べた様々な関係を発表したが，その後，教科書に書かれているまとめを見て,教師が「xの増加（減少）」,「yの増加（減少）」について説明を行った。そのときに，変化の方向についての話が出てきていた（日野, 2018)。反比例の授業でも，反比例の式とグラフの関係について生徒が発表した授業の次である第17時の冒頭で，GeoGebraでのグラフを見ながら，教師が，発話例にあるようなまとめをした。その後，教科書を開いて，チェックをした。

段階③について

段階③は，累加をベースとする共変的推論の段階である。反比例の場合は，共変の仕方が累加的ではないが，「一方が2倍，3倍になると，もう一方は1/2倍，1/3倍になる」，あるいは，「一方が2倍，3倍になっても，もう一方はそうはならない」といった推論は，整数倍や簡単な単位分数倍の範囲であるため,段階③に分類することにした。これに対して，より複雑な分数倍（n/m倍）が用いられる場合を，段階④とした（④は授業では観察されなかった)。

段階③に分類される整数倍や簡単な分数倍を使った共変的推論は，第13，19，20時に観察された。その他の時間でも，反比例かどうかを判断する問題が扱われたが,「一方が2倍，3倍になると，もう一方は1/2倍，1/3倍になる」という推論によって判断をすることはあまりなかった。生徒はむしろ，対応関係（xy=a等）から，反比例かどうかを判断していた。一方，第20時は日常の場面での問題解決の授業であったが，そこでは「時間を1/4時間に短縮するためには，1本の管を4倍して4本にしなくてはならない」という反比例の変化の推論が使われた。

また，反比例のグラフをGeoGebraで動的にかいたり，見せたりする際には，点の動き方について生徒が注目することが常であった。発話例にあるように,「速さが一定でない」「ゆっくりで,速くなる」「最初ゆっくりで出現」のような言い方が，教師，生徒ともに見られた（第14，15，16，17時)。このような発話をどの段階に分類するかは迷うところであった。比例の授業では，「一定の速さ」「同じペース」等を段階③に入れたことから，これらの発話も速さが一定かどうか，同じペースかどうかについてのものであるため，今回は，段階③に入れている。もし，速さが一定でないことに更に踏み込み，例えば，「1から2では3減っている。5から7では1減っている。だから,最初は－3,こちらは－0.5の減り具合になっている。」のような理由づけであると，平均変化率で比べているため，段階④になると考えている（今回は観察されなかった)。

第16時には，正の範囲での反比例のグラフをGeoGebraで見せ，比例のグラフとの類似点や相違点を考える場面があった。はじめは幾何学的な特徴が挙がったが，徐々に，速さが話題となった。「降りてくるの，めっちゃ速かった」という生徒の言葉を受けつつ，何度か見る中で，最初は速いが，最後はゆっくりであることを確認した。教師が，「数学

的には何て言うの？」と尋ねると,「速度が強弱」「速度がいまいち」「速度のずれ」のように様々な言い回しが挙がった。教師のヒントをもとに,やっと「速度が一定ではない」が出された。教師は，比例では速度が一定であったこと，また，グラフをフリーハンドで描き，「同じスピードなので直線でした。スピードが変わると，こんなふうに曲線になっていきますね。」と述べた。

こうした速度についてのやりとりは，生徒にとって印象に残ったかもしれない。第15時の冒頭で，小学校の反比例のグラフの特徴を教師が尋ねると，幾何学的な特徴の他に，「速度が一定じゃない」という発言があった。また，変域を拡張した後，反比例のグラフをGeoGebraで見る場面では，「昨日と逆だ。」という発言もあった。xが負の範囲では，点は左側から画面上にゆっくり登場し，xが大きくなるにつれて速く動き，下に消えていく。昨日は上から素早く画面に現れ右側にゆっくりと消えていったため，「逆」と表現したようである。また，昨日のxが正の範囲の部分と比べて，「y軸に近づくと速くなる。」という生徒もいた。

更に，第17時では，比例のグラフと反比例のグラフを同時に画面上で見せる場面があった。点の動き方が2つのグラフで異なることが視覚的に見える（図2）ため，比例と反比例のスピードの違いが顕著になった。y軸上には，xの増分が1のときのyの増分が青い線分（反比例は赤い線分）で示され，そこにもスピードの違いが現れた。こうしたグラフを数回みる中で，生徒からは「僕は比例一族ではない（コツコツとは出来ない）」という声も上がっていた。

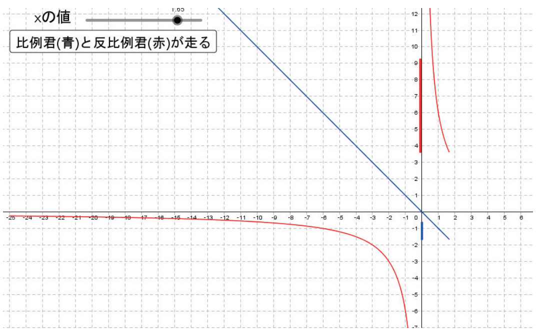

図2　比例と反比例のスピードの違い

(2) 対応に関わる発話について

反比例の授業では，対応の見方，考え方に関わる⑤と⑥の両方の段階が観察された。但し，やはり段階付けにおいて困難なものがあった。以下は，今回分類された発話の例である。

⑤：「（表をかいて，xとyの積が18になることを確かめる」「（$x=4$のときの$y=4.5$を）18÷4で求めた」（第13時）

⑥：「（$x=0$の下のyはなぜスラッシュ（/）なのかを$xy=a$の意味から考える」（第13時），「（aが）プラスの時は，右上がりの曲線と左下がりの曲線」「aが正のとき，xが小さくなる程y軸に近づく」（第16時），「xとyかけても同じ数にならないから反比例じゃない」（第17時），「（式を入れて点を動かすと問題の点を通るかどうか）」（第18時）

<u>段階⑤について</u>

段階⑤は，手続きベースの対応的な推論の段階である。手続きを適用することで，個別の対応をつけたり，幾つかの数値について同様の手続きを使ってできるペアの集合を考えたりする。しかし，個別に手続きを適用しており，変数の全体を見通すところまでは至らない。この段階の推論は，第13，14，15，17時の授業で観察された。生徒は，比例の授業のときと同様に，表をかくときに，また，表から点をプロットしたりするときに，段階⑤を経験していた。

<u>段階⑥について</u>

段階⑥は，2つの変数の間の対応関係を，全体を見通してイメージしていく段階である。ここには，次の2つを含めた（日野，2018）。(i) y/xあるいはxyが常に一定になっていることを使って考えることができること。(ii) 式による表現では，比例定数(a)が，xからyを作るうえでどのような影響を与えているかが分かること。反比例の授業においても，これらが観察された。

(i) については，xyが常に一定になっているかどうかを調べて，反比例であるか否かを判断する場面があった。比例のときには変化をみて判断することも多かったが，反比例においては，生徒は変化よりも対応を見て，xyが一定であることを根拠に，反比例の関係にあることを判断しているようであった。

更に，教師が，xyが定数であること（$xy=18$の式で表されること）をもとにして，表やグラフの特徴を理由づけて説明する場面があった。発話例の

「(x=0の下のyはなぜスラッシュ（/）なのかをxy=18の意味から考える」では，教師が，x=0を式に代入すると左辺が0になり，どんなyを代入してもxy=18とはならないため，x=0に対応するyは存在しないことを説明した。但し，この説明に対する生徒からの反応は希薄であった（「そっか」という声が1人の生徒から上がった）ため，生徒にどの程度理解されたかは定かではない。その他にも，教師は，y=18/x（xは正）のグラフをGeoGebraで示した際に，x軸の目盛りの10より大きい部分について，「10の先はどうなるか？」と問いかけたり，「(x=) 1よりも左はどうなるのか，y軸を越えてしまうのか」を問いかけたりした（第13時）。第15時には，y=18/x（x，yは負を含む）のグラフについて，x=0の下はスラッシュであること，グラフが第三象限にも現れること，グラフはy軸に触れないこと等の理由が，教師から生徒に問いかけられた。そして，教師が主導となり，例えば，y軸に触れないことについては，y軸上の座標の1つである（0，－12）を示し，「この軸の上は，xが0なんだよね。だから触らない。… y軸に近づくと書いておいて。」のように説明をしていた。

これらの一斉の場面では，教師が主導であるが，xy=aの式を用いて，対応するxとyの値を確認することで，表やグラフの特徴が意味づけられている。単に手続き的にxからyを求めるのではなく，xy=aという関係が成立していることを使って意味づけが行われており，(i）に関わっている。

第19時には，生徒がGeoGebraを操作する活動を行った。活動の1つは，ある点を通るグラフの式を求めるものである。式を入力すると，その式のグラフが動的に現れる。生徒は，自分が入力した式が正しいかどうかを，グラフがターゲットとする点を通るかどうかを見て確認することができる（図3は（2，3）からグラフがずれてしまい，y=4/xが間違っていることを示している）。

もう1つの活動は，描かれたグラフの式を求めるものである。これについても，式を入力すると，その式のグラフが動的に現れる。今度は，その式が正しいかどうかを，グラフがターゲットとするグラフの上をきれいになぞるかどうかをみて確認することができる。

生徒は「通った」「ずれた」などの声を上げながら，グループで活動を行っていた。これらの活動はシンプルであるが，反比例の式がある特定の（x，y）の集合を満たしていることを視覚的に理解することを促しており，(i）の見方に関わっている。

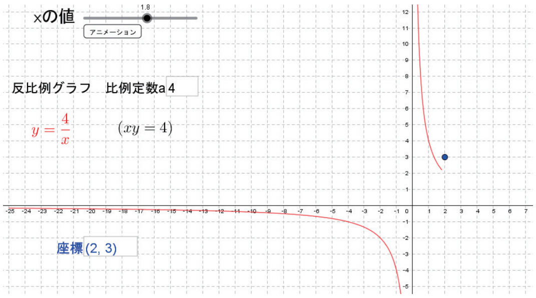

図3　入力した式が正しいかどうかを確認する

(ii）については，比例のときと同様に，反比例においても，式とグラフとの関係を調べ，その関係を生徒が発表する場面があった（第16時）。比例定数aが正であるか負であるかによって，グラフの場所が異なることが発表された。また，aが正のときは，「xが小さくなるほどy軸に近づき，xが大きくなるほど，x軸に近づく」という点が発表された。これについては，xが正の場合には成立するが，負の場合にはどうであるかが問題となっていった。それ以外にも，aの値が大きくなったり，小さくなったりすることで，カーブの緩やかさが変わっていくことを指摘する生徒もいた。これらの発表では，GeoGebraでグラフを表示することも行われており，aの値の大小とカーブの緩やかさは，グラフが動的に示されることで，生徒が気付いた部分もあると思われる。

5. 議論

前節では，中学校での反比例の授業における教師と生徒の発話から，変化，あるいは対応という見方がどう使われ，語られていたかを述べてきた。

反比例の授業では，変化よりも対応の見方による発話の方が活発であった。これは，反比例は変化でみるのが難しく（「2倍，3倍，…になると他方は1/2倍，1/3倍…になる」），それよりも対応するxとyを掛けて常に一定になるかどうかを見る方が容易であるためではないだろうか。それと同時に，比例のとき以上に，生徒は式に馴染んできているということもあるかもしれない。

反比例では，①，②の段階の発話は少なく，④の段階については観察されなかった。このように，変

化の見方による発話については，段階①，②，③に留まっている様子がみられ，小学校からの進展はあまり見られなかったといえる。

ただし，段階③については，「速さが一定でない」「ゆっくりで，速くなる」などの速さやペースに関わるものが観察されており，そこにはGeoGebraを用いてグラフを動的に見せたことが関わっていたと思われる。

速さやペースについて，生徒が活発に話していたという事実は，生徒とエキスパートの変化の割合のスキームの相違点を議論しているWeber & Dorko (2014) を参照すると，興味深いところである。なぜなら，Weber & Dorkoにおけるエキスパート（数学者）は，変化の割合をしばしば，変数間で，どの程度速く共変しているかを示す指標としてみているからである。あるエキスパートは，変化の割合を，「ある変数の変わり方に対して，ある変数がどれくらい速く変わっているか」であると述べ，また，グラフについての問題解決においても，「独立変数がとても小さな変化であるときの従属変数の変化を測定すればよい」のように言っていた。Weber & Dorkoは，エキスパートは変化の割合を，式やグラフといった表現の方法には依存しない形で意味づけているところが，生徒とは違っていたと述べる。実際，生徒は，変化の割合を式での計算手続きであると考えたり，傾きのようなグラフの性質であると考えたりする傾向があった。

本稿の生徒達は，GeoGebraの点の動きに大きく影響されていたり，定量的というよりは定性的であったりするため，Weber & Dorkoのエキスパートとはまた異なる。しかし，変わり方の速さという点は，共変的推論においては本質的であり，そこに素朴ながらも注目し始めているということは，大切な点であると考える。現在の注目を，いかに進展させていけるのかは課題となるところである。

一方，対応の見方による発話については，比例の授業のときよりも，段階⑥のものが活発にみられた。段階⑤は，式を用いた手続きであり，小学校でもある程度は行われている。それに対して，段階⑥は，式に対する見方や使い方が，それよりも一歩進んでいる。その段階⑥が，教師主導であるにしろ，問いかけや活動の中に見られたことは，興味深い。なお，$xy=a$において，xやyが小数や分数の場合について他方を求めたりすることも段階⑥に相当するが，そのような場面は見られなかった。変化の見方でも④が見られなかったように，生徒が有理数を使う場面はほとんどなかった。

段階⑥の（ii）のような見方や言い方は，中学校ではじめて出てくる進んだものである。しかし，教科書では，aが正の場合と負の場合についての反比例のグラフがかかれているだけであり，グラフは図形として捉えられて終わっている。本稿での実践では，生徒が調べた結果がGeoGebraを用いて確認されたため，aの大きさによるカーブの緩やかさ，aが正か負かによってxとyの増減がどう影響されるかといった考えも発表されていた。動的な提示の仕方によって，段階⑥の見方が出てきていたと考えられる。

また，段階⑥の（i）において，$xy=a$という式が，表やグラフの特徴を説明するために使われている場面があった。反比例の定義によって，$x=0$に対応するyがないことや，グラフが現れる場所といった特徴が正当化されていた。定義にもとづいて，性質が正当化されるというのは小学校ではみられない。論理的にナラティブを作っていくという，ナラティブの作り方の一端がみられたといえる。

6. おわりに

日野（2018）および本稿において，デザイン実験（第二サイクル）を行った2校のうちの1校（1クラス）について，教室で見られた発話の様相を，比例・反比例における学習軌道の段階によって特徴づけた。反比例の授業では対応の見方に関わる発話の方が優勢に見られるなど，教えられる内容によっても違いがみられた。また，小学校からの接続を考えたときに，小学校をあまり越えていない部分，小学校ではみられない中学校ならではの部分の両面が見いだされたと考える。特に，式を使いながら対応をみていくということは，中学校での進展があることが分かった。

また，デザイン実験ではGeoGebraを用いたが，動的にグラフなどを示すことが，変化や対応の見方の進展にも影響を与えていることが分かった。

一方，考察は一斉場面でのやりとりが中心であり，また，探索的にデータを見てきた程度に留まっている。生徒の個別のデータがあまり収集できなかったこともあり，生徒の視点からの考察が薄くなっていることは否めない。今後，データの収集の仕方も含

めて，検討をしていく必要があろう。

今後は，デザイン実験を行った他の1校について，同様の視点から考察を行っていきたい。

参考文献

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E.（2002）. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*（5）, 352-378.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J.（2016）. An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning, 18*（3）, 151-181.

日野圭子.（2016）.「比例の授業における数学的談話の構成：GeoGebraを通して教師が語ったこと」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』2号, 145－154.

日野圭子.（2017）.「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：関数の学習軌道からの授業場面の考察」『宇都宮大学教育学部研究紀要』67号, 第1部, 189－202.

日野圭子.（2018）.「比例・反比例の授業における数学的談話の構成：学習軌道からみた授業中の発話の考察（1)」『宇都宮大学教育学部教育実践紀要』第4号, 10-20.

Sfard, A.（2008）. *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Weber, E., & Dorko, A.（2014）. Students' and experts' schemes for rate of change and its representations. *The Journal of Mathematical Behavior, 34*, 14-32.

本研究は，平成27～30年度科学研究費補助金基盤研究（C)「小学校から中学校への移行期の生徒の関数的思考の進展を促す継続的な授業のデザイン」の助成を受けて行われている。

平成30年3月30日 受理

Construction of mathematical discourse in the lesson of proportional/inverse-proportional function

Keiko HINO