

高等学校数学において体系的な理解を促す授業展開の工夫 —公理的方法の考えに着目して—

湯澤 有孝・牧野 智彦・北川 義久

宇都宮大学教育学部教育実践紀要 第5号 別刷

2018年8月3日

高等学校数学において体系的な理解を促す授業展開の工夫[†]

—公理的方法の考えに着目して—

湯澤 有孝*・牧野 智彦**・北川 義久**
栃木県立矢板東高等学校*
宇都宮大学教育学部**

高校生は数学を体系的に理解しているとは言い難く、高校数学の授業が体系的な理解を促すようになっていない現状がある。そこで、本稿では、公理的方法の考えに基づいて数学の体系的な理解を促す授業の枠組みを検討し、三角関数の加法定理を事例に、授業の展開案を提案した。

キーワード：体系的な理解、公理的方法、高等学校数学

1. はじめに

平成30年3月30日に「新高等学校学習指導要領」が公示された。高等学校の数学科の目標は次の通りである。

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

- (1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。
- (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力、事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。
- (3) 数学のよさを認識し積極的に数学手を活用しようとする態度、粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問

題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

現行の『高等学校学習指導要領解説（数学編）』によれば、高校数学の考察対象が、数量や図形を含んだ体系的な「数学」という特徴や、数学が自然科学にとどまらず社会科学や人文科学へも活用される理由の一つに数学が体系的であり抽象であることをあげ、体系的な理解が必要であるとしている。

新学習指導要領の数学科の目標に目を向けると、中学校の数学科の目標が「基礎的な概念や原理・法則などを理解する」であるのに対し、高等学校は、「基本的な概念や原理・法則を体系的に理解する」となっていることから、「体系的な理解」は高等学校数学科の特徴の一つであるといえる。

一方、高校生の数学の学習に目を向けると、生徒は定義・定理・公式などの数学的知識や例題・演習問題における解法を、「覚える」ものになってしまっていると感じている。公式が「言える」または「書ける」ことが、公式を「理解する」と同義であるかのように誤解している生徒が多い。暗記で力をつけよう、手っ取り早く点を取ろうという、高校生の数学の学習は、「体系的な理解」がなされているとは言い難く、高等学校における数学教育の課題の一つといえる。

数学の教科書の記述をみると、用語を定義し、既習事項を使いながら新しい定理が証明されているので、体系的に理解する機会がないわけではない。し

[†] Aritaka YUZAWA*, Tomohiko MAKINO** and Yoshihisa KITAGAWA** : Mathematics lesson promoting systematic understanding in high school mathematics

Keywords : systematic understanding, high school

* Yaita Higashi High School

** School of Education, Utsunomiya University (連絡先: makino@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

かし、高校の数学授業では、生徒が新しい概念を形成したり、定理の間の論理関係を検討することが軽視されているように思う。それよりもむしろ、定理の活用による求値問題の解法に重点が置かれる傾向にある。このような授業が繰り返されることで、生徒は「体系的に理解」する必要性を感じなくなり、「正しく公式を覚えよう」「問題演習で公式の活用に慣れよう」「問題の解き方を覚えよう」などという態度に陥ってしまうのかもしれない。

そこで、高校生が数学を「体系的に理解」できるようにする授業とはどのようなものか、を考えることは喫緊の課題である。

2. 体系的な理解を促す授業の概念枠組み

(1) 体系的な理解

理解には「関係的理解」（理由がわかってできること）と「用具的理解」（理由はわからないができること）があると言われている。しかしながら、体系的に理解することは、数学的知識の関係に着目するという関係的理解を超えて行われるものであると考える。知識間の関係は、演繹による論理関係にあると同時に、公理系に関連付けて数学的知識が整理されている状態を、本稿では「体系的理解」という。

ここで注意が必要なのは、数学の体系自体を学習することを目的とする授業ではなく、生徒が数学を体系的に理解することを促す授業であるということである。そのために、本研究では「公理的方法を学習指導の方法に用いようとする立場」を採用する。

また、授業において、どのような論理体系の構造に着目させるかが重要である。しかしながら、いわゆるユークリッドやヒルベルトにみられるような公理や、昭和40年代当時の教科書にある順序体の公理を直接取り上げることは、現行の学習指導要領の内容と照らし合わせても現実的ではない。生徒の体系的理解が、公理系を理解してからそこに関連づけるという順でなされるというのではなく、多くの数学的知識の論理的理解を通して少しずつつながるだろうと考えるからである。

(2) 公理的方法の考え

高等学校数学科の目標を見ると、「数学的な見方・考え方を働かせて」とある。本研究では、体系的な理解をうながすために働かせる、数学的な考え方として、「公理的な考え方」に着目したい。

「公理的な考え方」は、片桐重男が示した「数学的な考え方」の「方法に関する数学的な考え方」に

位置付けられている。「公理的な考え方」は公理的方法という数学的方法に関係する数学的な考え方であった。また、公理的方法にみられる様々な考えは、数学教育における公理的方法の役割という点から、「根拠（公理・原理）を探る」と「仮設（公理）をおいて考える」という2つに集約された。

そこで、体系的な理解へ向けて、「根拠（公理・原理）を探る」と、「仮設（公理）をおいて考える」ことが働くような授業について提案を行う。

(3) 演繹ネットワーク

教師が教材を研究する際に着目する教材の構造としての公理系の局所的・部分的体系を、「演繹ネットワーク」と呼ぶことにする。

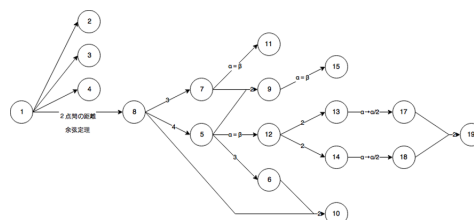


図1：加法定理の演繹ネットワークの例

これは、生徒にとっては、論理的理解によって数学的知識を整理することを繰り返すことで得られるものである。また、演繹ネットワークの出発点となる命題は、公理に限ったものではなく、その指導場面に応じて適宜設定される基本的な命題や定理である。生徒は、ある命題の根拠を明らかにしようとして解析的に考えていく中で得られる場合もある。

昭和40年代当時の教科書にある体系の図は、教科書でそれまでに取り扱われた公理や定理を単に図式化して整理されたものであった。それに対し、「演繹ネットワーク」は、公理的方法の考えをもとに、教師の教材研究から得られるものである。「演繹ネットワーク」は、体系的な理解を促すために授業で生徒によって生成され、生徒が数学のよさを実感するために活用される。

(4) 体系的な理解を促す授業の視点

以上のことを改めて整理すると、本稿における体系的な理解を促す授業とは、次の通りである。

教師が教材研究することで想定した演繹ネットワークに基づき、生徒がある定理の根拠を探ったり、そこで得られた基本的な命題を置いて、そこから創造的・発展的に考えたりする授業

体系的な理解を促す授業の目標は、生徒が単に演繹ネットワークを生成するというのではなく、数

学的な知識を演繹ネットワークの中に位置づけようとするプロセスや生成した演繹ネットワークをもとに、体系的に組み立てられている数学のよさを実感し、発展的・創造的な学習につなげることである。

3. 授業の具体化

(1) 単元の指導計画における本時の位置づけ

本時を、加法定理の諸公式を導いた後の時間に設定する。

(2) 本時のねらい

「根拠を探る」「仮設（公理）をおいて考える」という公理的方法の考えをもとに、加法定理の諸公式の体系から、加法定理を体系的に理解できるようにする。

(3) 本時の学習課題

課題① 証明の分析を通して、加法定理の諸公式の演繹ネットワークを生成し、図式化を行う。

課題② 課題①で得られた図からわかることを検討する。

さらなる探究的・発展的課題として、次のような課題が考えられる。

課題③ 教科書にはないような新たな公式を導き、演繹ネットワークを広げる。

図1以外に、加法定理の演繹ネットワークにはいくつもある。その他の例は以下の通りである。

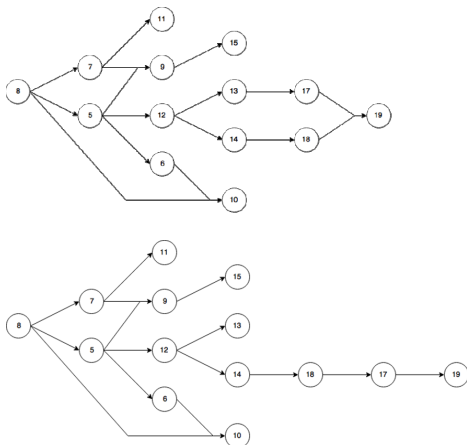


図2 加法定理の演繹ネットワークの例

演繹ネットワークを構成している番号は、次の①～⑱の公式を表している。

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0) \cdots \textcircled{1}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \cdots \textcircled{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \cdots \textcircled{4}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cdots \textcircled{5}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cdots \textcircled{6}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cdots \textcircled{7}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdots \textcircled{8}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \cdots \textcircled{9}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \cdots \textcircled{10}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdots \textcircled{11}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdots \textcircled{12}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdots \textcircled{13}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \cdots \textcircled{14}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdots \textcircled{15}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdots \textcircled{16}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \cdots \textcircled{17}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \cdots \textcircled{18}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdots \textcircled{19}$$

(4) 授業展開の例

まずは、これまでに学習してきた公式を、挙げさせる。挙げられた公式をその都度板書し、番号をふっていく。それから、挙げられた公式を全部覚えるのは困難であることから、各公式の根拠を見つけていくことを促す。例えば、 $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ の根拠は、 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ と $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ であることを問う。 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ だから、その2つの公式が根拠となる。それをもとに、演繹ネットワークを黒板の中央に提示する。

この段階で、生徒は課題①に取り組む。 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ の根拠を探す活動を促す。これを繰り返して、演繹ネットワークの図を大きくしていく。これを繰り返すことで、最終的には、次の

cosの加法定理に辿り着くことに気付かせる。

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

そして、そこまでの演繹ネットワークを黒板に図示する。

さらに、 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ の公式の証明を分析して、どんな定理が使われているかを明らかにする。その結果、次の公式が演繹ネットワークの最初の公式として書き加えられる。

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0)$$

ここで、課題②に取り組む。ここでは、演繹ネットワークの図をもとに、どの定理が鍵を握っているのかを見出したい。

4. 考察

(1) 公理的方法の学習指導における立場について

これまでの学習指導要領を概観するなかで、特に平面幾何の学習内容に着目すると、大きな変化に気付いた。それは、中学校で学習した図形の性質の根拠を明らかにして、公理を設定する必然性を学習し、三角形の合同条件を公理から証明することによって定理化するというような内容から、中学校の学習した知識自体を基本的な出発点として、チェバ・メネラウスの定理とその逆や方べきの定理とその逆などのより高度な定理を順次導き、それらの定理を平面図形の求値問題や証明問題に活用するような内容への変化だった。これは、公理的方法そのものが高等学校数学の学習対象であったものから、公理的方法を数学の理解の仕方に用いようという変容と捉えられる。

(2) 数学的な考え方について

数学的な考え方の具体化を通して、現代数学の成立過程にみられる根底にある方法や、学問としての数学を支える土台のようなものが公理的方法であり、公理的な考え方が、「根拠（公理・原理）を探る」、「仮設（公理）をおいて考える」という数学の精神とも言うべき考えによってなされることごとくを知ることができた。

これらの考えは、数学者が数学を作り上げてきた際の本質的なところであり、数学的活動を一層大切にしなければならぬ今日の数学教育でも、もっとも大切にしなければならぬ理念と考える。

(3) 数学教育における教科の構造について

数学という教科がもつ構造は、論理的で演繹的な構造であることが妥当であり、公理的体系のようなものである。しかし、教科の構造そのものを教えれば、生徒の理解が体系的になされるということではなく、論理的に数学を理解することを通して、徐々に体系的理解がなされるということが重要であるという考えに立ち、教材における体系を、演繹ネットワークを用いて説明した。

(4) 教材研究・授業の構想について

教科書の内容を伝えるという授業観を省みて、公理的方法の考えに基づいた加法定理の諸公式の体系化の授業を提案した。このことにより、教師の教材研究に公理的方法がいかに大きな役割を果たすかを示すことができた。

また、生徒にとっても、公理的方法の考えによって展開される授業は、数学的知識をなぜ体系化することができるのか、体系化によってどんなメリットがあるのかという、数学のよさに通じる学習になるのではないだろうか。

5. 今後の課題

本稿では、体系的な理解を促す数学的な考え方に着目し、授業を構想した。授業を実施する段階では、このような授業で生徒がどのような思考活動を展開するのかを分析する必要がある。どのような手立てのもとで、そのような取り組みが可能なのか、考えていきたい。また、今回の事例は、数学Ⅱにおける「三角関数の加法定理」であったが、そのほかの単元についても、公理的方法の考えに基づく授業がどのようなものであるのか検討し教材化を行いたい。

参考・引用文献

片桐重男 (2017). 名著復刻 数学的な考え方の具体化. 明治図書.

文部科学省 (2009). 高等学校学習指導要領解説数学編. 実教出版.

文部科学省 (2018). 高等学校学習指導要領.

http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2018/03/29/1384661_6_1.pdf (最終確認2018.3.30)

杉山吉茂 (2010). 復刻公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版社.

平成30年3月30日 受理

Mathematics lesson promoting systematic understanding in high school mathematics

Aritaka YUZAWA, Tomohiko MAKINO and Yoshihisa KITAGAWA