

博士論文

原子光学に現れる非ソリトン型初期波束の
非線形シュレディンガー方程式による解析

2019年3月

藤嶋 浩史

概要

原子光学で用いられる準1次元的な導波路内を伝搬する引力型 Bose-Einstein 凝縮体の運動を記述する時間依存 Gross-Pitaevskii 方程式および非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) の初期値問題において、非ソリトン型初期波束から放出される輻射が系の時間発展に与える影響を解析した。様々な幅をもつ箱型・井戸型ポテンシャルに非ソリトン型初期波束を入射させ、波束の反射率や透過率が初期波束中心の位置と系の非線形性の強さを表すパラメタにどのように依存するかを数値的に調べた。その結果、非ソリトン型初期波束の反射率や透過率は輻射放出に伴う波形変動の影響によって、初期波束中心を置いた位置に依存することがわかった。実空間で振動しながら輻射を放出する波束を運動量空間で見ると、その波形に高周波のパターンが形成されることを示し、このパターンによって輻射の存在を実験的に観測できる可能性があることを指摘した。NLS 方程式に付随する Zakharov-Shabat の固有値問題 (ZS 問題) を通じて非ソリトン型初期波束を構成するパルス同士の相互作用を解析した。2つの矩形型初期パルスの相互作用を調べた結果、輻射同士の相互作用によって系の終状態に現れるソリトンの数が増えることがわかった。急減少する任意の滑らかな初期波束を解析できる新しい計算手法を発見し、相対位相をもつ2つの滑らかな非ソリトン型初期パルスの相互作用を調べた結果、最終的に生成されるソリトンの数は相対位相によっても変化することがわかった。ZS 問題を通じた解析は、発展方程式の直接的な数値積分によらない方法であるため、長時間にわたる数値計算や数値誤差の蓄積を避けられる。本研究によって、初期条件のソリトン解からのずれは系の時間発展に無視できない影響を及ぼしうることが示された。

謝 辞

本論文の作成にあたり、著者が早稲田大学博士前期課程在籍時のメンターであった日本原子力研究開発機構の奥村雅彦博士と早稲田大学本庄高等学院の峰真如博士に感謝する。両博士は本論文第3章と第4章の内容に関する出版論文の共著者である。また、在学中に受けた数多くのご指導に対し、早稲田大学の山中由也教授と大場一郎名誉教授に御礼申し上げる。さらに同大学の丸野健一教授は、本研究に興味を寄せられ刺激的な議論をしていただいた。

筆者は、東京大学理学研究科の故和達三樹名誉教授が著された非線形波動と厳密可解系に関する和文の教科書に導かれて、本研究を始めるに至った。生前に頂戴したコメントと合わせ、感謝申し上げます次第である。また、東京大学数理科学研究科の Wilcox Ralph 教授と時弘哲治教授は、筆者に複数回のセミナーの機会ならびにたくさんの励ましや助言を与えられた。

そして、何より宇都宮大学工学研究科の矢嶋徹教授に最大の感謝を申し上げたい。矢嶋教授は4編の出版論文の共著者であり、筆者が博士論文作成に至るまでの長期間にわたり、学外者である筆者に研究と有益な議論のためのスペースを提供してくださり、多忙な公務の間を縫って数限りない有形無形の援助をしてくださった。また同研究科の小池正史准教授と故中島日出雄教授との刺激的な議論や数々のアドバイスなしに本論文の完成は考えられなかった。

私事ながら、この論文は実家を含む家族全体の支えによって完成された。特に筆者が本業でもない研究活動に熱を上げているがために寂しい思いをさせた幼い子供達、志穂と哲史の面倒を、妻純子はよく見てくれた。彼らが、いつしか筆者と同じように何らかの分野に熱を上げ始めた時、その興奮を共有し援助することは筆者のささやかな希望である。

最後に、審査委員の労をお引き受けくださった主査の矢嶋徹教授をはじめ、宇都宮大学工学研究科の湯上登教授、上村佳嗣教授、石田邦夫教授、小池正史准教授の各先生方に対し、改めて感謝の意を表したい。

目次

概 要	i
謝 辞	iii
第 1 章 導 入	1
1.1 Bose-Einstein 凝縮と原子光学の発展	1
1.2 原子光学に現れる非線形 Schrödinger 方程式と ブライトソリトンの生成	3
1.3 非ソリトン型初期条件と輻射の放出	4
1.4 本論文の目的と構成	6
第 2 章 逆散乱法によるソリトン方程式の初期値問題の解法	8
2.1 ソリトン方程式の線形化	8
2.2 散乱の順問題：Zakharov-Shabat の固有値問題	9
2.3 散乱の逆問題：Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式	11
2.4 逆散乱法とその適用範囲	14
第 3 章 TDGP 方程式の 1 次元ポテンシャル散乱問題	18
3.1 時間に依存するポテンシャル散乱問題の定式化	18
3.2 数値計算結果	20
3.2.1 自由伝搬	20
3.2.2 箱型ポテンシャル	22
3.2.3 井戸型ポテンシャル	25
3.3 議論	28
3.3.1 TDGP 方程式によるポテンシャル散乱問題の特徴	28
3.3.2 ポテンシャル井戸による波束の捕捉現象	29

第 4 章	非ソリトン型初期波束の運動量空間波形におけるパターン形成	31
4.1	運動量空間におけるパターン生成のメカニズム	31
4.2	近似モデルによる計算	32
4.3	数値計算による結果	33
4.4	引力相互作用する BEC を用いた輻射検出実験の可能性	36
第 5 章	矩形関数の和で近似された初期波束の相互作用後に残留するソリトン数の解析	43
5.1	空間離散化による ZS 問題の近似解法：I	43
5.2	箱型初期波束への適用	45
5.2.1	単一の箱型初期波束の場合	46
5.2.2	2 連箱形初期波束の場合	48
5.2.3	非対称な大きさをもつ 2 連箱形初期波束の場合	51
5.3	数値シミュレーションとの比較	53
第 6 章	任意形状をした急減少パルス間の相互作用後に残留するソリトン数の解析	60
6.1	空間離散化による ZS 問題の近似解法：II	60
6.2	二峰性初期波束への適用	67
6.3	数値シミュレーションとの比較	72
6.4	BEC 実験に対する ZS 問題解析の意義	75
第 7 章	結 論	77
7.1	局所ポテンシャルによる波束散乱	77
7.2	運動量空間の波形におけるパターン形成と輻射の検出可能性	79
7.3	崩壊する 2 連箱型初期波束同士の干渉が終状態へ及ぼす影響	79
7.4	相対位相をもつ 2 つの非ソリトン型波束を重ね合わせて得られる二峰性初期波束においてパルス間相互作用が終状態に及ぼす影響	81
7.5	数学的な発展の方向性	83
付 録 A	ソリトン方程式の初期値問題の適切性	85
付 録 B	非線形波動研究史概観	87
	参考文献	89

第1章 導 入

1.1 Bose-Einstein 凝縮と原子光学の発展

Bose による Planck の輻射公式の導出に用いられた光子の不可弁別性の重要性を掘り下げた Einstein は、その概念を有限質量の理想 Bose 粒子に適用し、1925 年に Bose-Einstein 凝縮 (BE 凝縮) の概念に到達した [1, 2]。BE 凝縮とは、極低温において巨視的な数の Bose 粒子が一斉に系の最低エネルギー状態に落ち込む量子相転移現象で、ヘリウム 4 が示す超流動性の発現機構であるとの指摘が古くからなされている [3]。しかし、液相であるヘリウム 4 は構成粒子間の相互作用が極めて強く、その物性は理想 Bose 気体に対する理論が与える結果からの乖離が大きい。さらに中性子線回折の実験から求められた凝縮粒子の割合は全粒子の 1 割程度にとどまるため [4, 5]、ヘリウム 4 は Einstein が予言したオリジナルの BE 凝縮の描像から隔たったものであった。これに対して、中性希薄アルカリ原子気体を用いた実験では粒子間相互作用が十分弱く、1995 年に理想 Bose 気体の理論に照らしてほぼ全構成粒子が BE 凝縮したと明白に認められる状況が実現された [6–8]。以後、BE 凝縮した粒子集団である Bose-Einstein 凝縮体 (Condensate) を BEC と略記する。

BE 凝縮を起こすためには系を十分低温まで冷却する必要がある。極低温下では、各原子の運動量が極めて小さくなるので、各原子の de Broglie 波長が巨視的な長さに達し、互いに重なり合う。そのため、各原子の粒子性を認めることが困難になり、個別性を喪失した原子集団は波動的性格を強く帯びるようになる。また、各粒子のエネルギーが下がるにつれて、多数の粒子が系の最低エネルギー状態にある可能性が高まる。これを量子縮退といい、Bose-Einstein 統計にしたがう Bose 粒子の場合に限り、実際に複数の粒子が同じ最低エネルギー準位を占めることが許される。BE 凝縮が起きたとき、凝縮した粒子の波動関数は全て同じ最低準位のエネルギー固有関数である。このため BEC は、原子集団全体が単一の巨視的波動関数 ψ でコヒーレントに記述できるという際立った特徴をもつ [9–13]。

BE 凝縮は粒子・波動の 2 重性や Bose 統計性など、量子物理学がその基礎にお

く基本的概念が端的に発露する極めて重要な現象の1つと見なされてきた。そのため、BEC生成の明証を得るための努力が、約70年間の長きにわたって続けられてきた。その過程で、BE凝縮に必要な極低温まで原子集団を冷却するためのレーザー冷却法や、原子気体を真空中に捕獲しておくための原子トラップ法など、人工的に量子系を制御・観察する技術が開発された [14-16]。これらの新技術は原子分子物理学をはじめ、量子エレクトロニクスなど、その他の応用領域にも多大な影響を与えて現在に至り、その発展は止むことなく現在まで続いている。

一方で、これらの技術を駆使し、BECの波動性やコヒーレンスを活かした応用を目指す分野は、「原子光学」という分野を形成している [17,18]。原子光学という名称の付け方は、一種のアナロジーに基づいている。通常の光学では、レンズやミラーなど物質からなる光学素子を用いて、レーザーなど古来から波動とみなされてきたビームの伝搬を制御する。一方、BE凝縮を起こした冷却原子集団は物質的性格よりも干渉性のある波動としての性格が強く、いわば物質波レーザーとして振る舞う。巨視的波動関数の絶対値2乗 $|\psi|^2$ は凝縮粒子の密度に比例し、BECの分布密度はその分布密度に対応した原子の吸光度から光学的撮影手段によりリアルタイムに観察することができる [19]。実際、個別に生成された2つのBECを近づけると、粒子密度に干渉縞ができる [20]。この際、物質波レーザーの伝搬を制御する光学素子として用いられるのは、通常物質からなるレンズやミラーなどではなく、レーザーによる輻射圧やそれによって形成される光のポテンシャルである。つまり、原子光学では通常の光学における物質素子と光ビームの役割が入れ替わっている。

初期の原子光学は、BECの生成とその物性を解明するための技術を提供すること自体が目的であった。しかし、BECの生成が実現してから四半世紀が過ぎようとしている現在では、応用面への展開を目指した研究が進展している。原子光学の応用として期待される方向性の1つに、BECに特長的な物質の波動性をフルに活用した高性能量子デバイスの開発がある。例えば量子計算用に原子導波路を設けた原子チップが製作され、その上でBECが生成された [21]。また、同じく原子チップ上で、BECを用いた Michelson 干渉計 [22] や重力計 [23] を構成したという成果も報告されている。

このような原子光学的デバイスにおいては、原子チップ上にBECからなるパルスを伝搬させるための細い原子導波路を張り巡らせ、他のBECと干渉させる地点までBECのパルスを伝搬させる必要がある。そのため、原子導波路のように空間

的自由度が1次元的な系は、原子光学において極めて重要な意義をもつ研究対象となっている。

1.2 原子光学に現れる非線形 Schrödinger 方程式と ブライツソリトンの生成

原子光学において主要な役割を演じる BEC の巨視的波動関数 ψ は、本来3次元的な非線形波動方程式によって時間発展する。しかし、BEC を細長い擬1次元的な導波路に閉じ込めた場合には、よく知られた非線形 Schrödinger 方程式 (NLS 方程式)

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi \quad (1.1)$$

によって ψ の振る舞いが決まる [9–13]。NLS 方程式において、結合定数 g は一般に系の自己相互作用の強さを規定しており、BEC の場合には凝縮体を構成する原子間の相互作用の強さを表す。ただし、原子光学における g は固定された定数とはならず、 x と t の関数として与えられる外部磁場の印加による Feshbach 共鳴を用いてその符号と大きさを自由に変えられる実験パラメタである [24–26]。NLS 方程式は、流体力学やプラズマ物理、非線形ファイバ光学など、幅広い分野に現れる様々な非線形波動を記述する重要な方程式である。そのため、これらの古典物理学的な分野で既に多くの研究が行われてきたが [付録 B]、原子気体による BEC 生成の実現は、NLS 方程式による非線形波動研究に新しい応用分野を提供した。

非線形波動の分野では、NLS 方程式 (1.1) がソリトン解と呼ばれる特解をもち、それに対応してソリトンと称する孤立波が観測されることは広く知られている [27–34]。特に結合定数 g が負であるときには、 $|x| \rightarrow \infty$ で振幅が0の孤立パルスを表す特解が存在し、ブライツソリトン解と呼ばれる。ブライツソリトンは同時に複数存在することができ、パルス間での相互衝突があっても、それらの位置関係だけが変わり、パルス数や波形は変わらないという粒子的性質をもつ。そこで、BEC のブライツソリトンを生成できれば、原子導波路中で拡散しないロバストなパルスを伝搬させることが可能になる。このような安定したパルスの伝搬技術は原子チップなどのデバイス開発に有利となるため、擬1次元的領域に引力相互作用をする BEC を閉じ込めて物質波ソリトンを生成・観測する実験が多数行われている [35–38]。また、複数の BEC からなるパルスがその密度を拡散させずに伝搬するブライツソリトンの列を実現した報告もなされている [35, 39]。なお、 $g > 0$ となる BEC に位

相勾配を印加することによって、局所的に原子密度が希薄になるダークソリトンも報告されている [40,41] が、本論文では、上記のブライトソリトン列の実験に着目して $g < 0$ の場合しか扱わない。以後、ブライトソリトンを単にソリトンという。

しかし、これらの実験結果をソリトンの描像だけに基づいて理解することは難しい。例えば、実験 [35,39] では、複数の BEC からなるパルス列が生成され、それらが長時間にわたって拡散することなく伝搬する様子が観測されている。一方で、時間の経過とともに形状や個数が変化するパルスの存在も捉えられており、全てのパルスが NLS 方程式のソリトン解に対応すると解釈することには困難が伴う。パルス数変動の要因の1つとして、実験における初期条件の準備が完全でないことが考えられる。例えば実験 [39] では、対向レーザーがつくる定在波の周期的輻射圧によって、1つの大きな BEC を多数の小パルスに分割し、それらを初期パルスとして用いた。このような BEC の分割によって作られた個々の初期パルスが $t = 0$ においてソリトン解と完全に一致する波形をもっていたとは考えられない。もとより一般的に、あらゆる物理系において実験誤差や不確定要素の混入は不可避であり、初期波束は厳密なソリトン解からずれた非ソリトン型初期波束である。

1.3 非ソリトン型初期条件と輻射の放出

厳密なソリトン解からずれた非ソリトン型の初期波束は、低振幅で素早く拡散するさざ波を左右に放出しながら形を変えていく。時刻 $t \rightarrow \infty$ の極限では、その波動関数がソリトン解と完全に一致するパルス、すなわちソリトンだけが拡散せずに残留することが知られている [42]。ソリトンが生成されるのは、初期波束がその幅に対して十分な振幅をもっている場合に限られる。一方、低振幅で素早く拡散するさざ波は輻射と呼ばれるが、終状態に生成されるソリトン部分のノルムと比べて輻射のノルムは小さい。論文 [42] では、初期波束のノルムを全空間で $\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx = 1$ となるように規格化した場合、ソリトン部分のノルムが終状態において $O(1)$ に留まることも示されている。これらのことから、輻射の放出が系のダイナミクスや系の終状態に与える影響は小さいと考えられてきた。引力型 BEC のソリトンを扱ったレビュー [43] でも、輻射の影響に関する研究はほとんど取り上げられておらず、原子光学において輻射の放出が果たす役割はこれまで十分に評価されてきたとは言えない。実際、初期波束が単一のパルスからなる場合は、左右に放出される輻射は何とも相互作用することなく無限遠まで拡散・消失するの

みであり、輻射の放出は特に興味ある現象を引き起こさない。

しかし原子光学においては、上で述べたブライトソリトン列の実験における初期パルスの生成法をはじめ、干渉計を目的として波束分割を行う場合など、複数の初期パルスが近接して並んでいるような初期条件を容易に想定することができる。このように初期パルスが複数からなる場合においては、輻射は単に無限遠まで拡散して消失するだけの存在ではなくなる。複数の非ソリトン型初期パルスの崩壊に伴って放出される輻射は、輻射同士はもちろん、終状態でソリトンとなる大振幅の部分とも相互作用する。そのような状況においては輻射の放出が系のダイナミクスや系の終状態に与える影響の評価が重要になる可能性がある。例えば、左右に配置された初期パルスから放射される輻射同士が同位相で強め合いの干渉を起こせば、十分な振幅が生成されて終状態でソリトンを生成するようなことも期待される。このとき、崩壊する複数の初期パルスの振幅や距離だけではなく、各パルス間の相対位相も重要である。実際、引力相互作用する2つのBECを用いて行われた衝突実験では、元のパルス間の相対位相によって系の時間発展が異なる様子が観測されている [44]。このように、非ソリトン型初期波束の崩壊に伴う輻射が系の時間発展に及ぼす影響は、初期パルスが複数存在して互いに相互作用する状況下において初めて顕在化する可能性があり、原子光学ではまさにそのような状況での実験が行われている。

また、原子光学においては、局所的なレーザー照射によってBECの導波路中に散乱ポテンシャル $V(x)$ を生成し、BECの巨視的波動関数の反射率や透過率に応じて波束を分割するビームスプリッターを実現する試みも行われている [45, 46]。この際、ポテンシャルに向かう波束の形状が完全にブライトソリトン解のものと一致していれば、反射率や透過率は波束の伝搬距離にかかわらず一定であるが、非ソリトン型の初期波束が輻射を放出し波形を絶えず変化させるとすれば、ポテンシャル相互作用領域に侵入したときの波形に応じてノルムの分割のされ方が変化する可能性がある。このような外力ポテンシャルが存在する場合の解析も重要な研究対象である。その際BECの巨視的波動関数は時間依存 Gross-Pitaevskii 方程式 (TDGP 方程式)

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + V(x)\psi + g|\psi|^2\psi \quad (1.2)$$

にしたがう。TDGP 方程式は NLS 方程式 (1.1) に外力ポテンシャル $V(x)$ の項を付け加えた形をしている。

1.4 本論文の目的と構成

これまで述べてきたように、原子光学における実験を解釈したり素子の性能をシミュレートしたりする上で、初期波束のソリトン解からのずれが系の時間発展に及ぼす影響を解析することは非常に重要なことである。そこで

- 本論文では、NLS 方程式 (1.1) および TDGP 方程式 (1.2) の初期値問題において、特に非ソリトン型の初期波束の崩壊に伴って放出される輻射が、系の時間発展に与える影響を調べる。すでに述べたように、単一パルスの輻射は他の対象と相互作用することなく左右に拡散してしまうだけのため、NLS 方程式を考える場合には非ソリトン型初期波束が複数存在し、それらが相互作用する条件を課す。TDGP 方程式を考える場合には、初期波束として単一の非ソリトン型パルスを設定するが、輻射と相互作用する局所的な外力ポテンシャルを与える。

しかし、ソリトン方程式として知られる NLS 方程式の場合であっても、非ソリトン型の初期波束の下では解の具体的表示が得られない。そのため、非ソリトン型の初期波束をもつ初期値問題を解析して輻射の影響を調べることは簡単ではなく、初期値問題の解析手法自体を開発することにも価値がある。幸い、過渡的な変化が終わった系の終状態の情報は、第 2 章で概要を説明する逆散乱法の手法を用いることで、時刻 t における波形の変化を追跡せずに引き出せる [47–54]。逆散乱法は、あらゆるソリトン方程式が共有する特殊な数学的性質に深く根ざした強力な手法で、ソリトン理論の支柱の 1 つをなす。ソリトン方程式の直接的な数値積分を回避する方法は、終状態が生成されるまでの長時間にわたる数値計算や数値誤差の蓄積を避けられる点で好ましい。そこで、

- 本論文では、複数並んだ初期パルスから放出される輻射同士の干渉が系の終状態に及ぼす影響を、ソリトン方程式の直接的な数値積分を行うことなしに調べる方法の開発を行う。

一方、局所外力ポテンシャル $V(x)$ が存在する TDGP 方程式 (1.2) の場合は、系の並進対称性が破れ、既存のソリトン理論を用いて系の情報を解析的に引き出すことは難しくなる。問題を時間に依存しない定常問題として扱う近似解法理論も発展しているが [55]、その場合には波束を入射させる状況を考えることはできない。そこで、波束の散乱を研究する場合の研究手段は直接的数値積分でダイナミクス

を追跡する方法にほぼ依存しており [56–58]、本論文でも TDGP 方程式 (1.2) の数値積分を行う。

本論文は下記のとおり構成されている。まず、第2章でNLS方程式を例にとり、ソリトン方程式の逆散乱法の概略を本論文に必要な範囲で紹介する。第3章では様々な幅をもつ箱型・井戸型ポテンシャルに非ソリトン型の初期波束を入射させる場合を考え、波束の反射率や透過率が初期波束を規定するパラメタと系の非線形性の強さを表すパラメタにどのように依存するかを数値的に調べる。第4章では、終状態でのソリトンに向かって振幅を振動させながら輻射を放出している過渡的な非ソリトン型波束を考える。そのような波束が含む、最終的にソリトンとなる部分と輻射とが運動量空間で干渉することによって運動量空間における巨視的波動関数の波形に高周波のパターンが形成されることを示し、このパターンを観測することによって非ソリトン型初期波束から放出される輻射を間接的に観測する可能性を指摘する。第5章では、Boffetta と Osborne による準解析的な近似方法 [60] を用いて、2つの矩形型初期パルスから放出される輻射同士の干渉が系の終状態に及ぼす影響を調べる。第6章では、急減少する任意形状の初期波束を解析しうる新しい計算手法を提案する。そして、相対位相をもつ2つの滑らかな非ソリトン型パルスを重畳してできる初期波束を設定し、それぞれのパルスから放出される輻射による相互作用が、系の終状態に及ぼす影響を調べる。最後の第7章はまとめと今後の展望に当てられ、本論文で提案した方法を適用できる問題のクラスを示す。

第2章 逆散乱法によるソリトン方程式の初期値問題の解法

逆散乱法は、ソリトン方程式の初期値問題を解く標準的な方法として知られている。ここでは第3章以降に必要な事柄に絞り、その概略をNLS方程式を例にとって説明する。本章の内容と表記法は概ね和達の著書 [27] と、Ablowitz と Segur の著書 [48] に準ずる。

2.1 ソリトン方程式の線形化

$\psi(x, t)$ を未知関数とする非線形偏微分方程式

$$F(x, t, \psi, \psi_x, \psi_t, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

が与えられたとする。この方程式に付随した1組の線形補助問題

$$\Psi_x = S\Psi, \quad (2.2a)$$

$$\Psi_t = T\Psi \quad (2.2b)$$

を考える。ただし、 S と T は、定数 ξ ならびに $\psi(x, t)$ 、およびその導関数を成分に含む行列であり、 Ψ は適切な境界条件を満たす補助ベクトルである。定数 ξ をスペクトルパラメタと呼ぶ。偏導関数の連続性を仮定して、

$$\Psi_{xt} = \Psi_{tx} \quad (2.3)$$

を要求すると、式 (2.2) が両立する条件

$$S_t - T_x + [S, T] = O \quad (2.4)$$

を得る。ここで、 O は零行列を表す。 S と T は、式 (2.4) が ξ に依存しなくなると同時に方程式 (2.1) を与えるように選ぶ。本論文で扱うNLS方程式

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (2.5)$$

の場合、 S と T は 2×2 行列、 Ψ は 2 成分ベクトルで

$$S = \begin{pmatrix} -i\xi & i\psi^* \\ i\psi & i\xi \end{pmatrix}, \quad (2.6a)$$

$$T = \begin{pmatrix} 2i\xi^2 - i|\psi|^2 & \psi_x^* - 2i\xi\psi^* \\ -\psi_x - 2i\xi\psi & -2i\xi^2 + i|\psi|^2 \end{pmatrix} \quad (2.6b)$$

とすればよい。ただし、 ψ^* は ψ の複素共役を表す。以後、* つきの量は元の量の複素共役を表すものとする。このとき、式 (2.4) は

$$\begin{pmatrix} 0 & i\psi_t^* - \psi_{xx}^* - 2|\psi|^2\psi^* \\ i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi & 0 \end{pmatrix} = O \quad (2.7)$$

となって、確かに ξ 依存性が消え、同時に NLS 方程式 (2.5) を与える。以下、NLS 方程式を例として逆散乱法の具体的な手順を説明する。

2.2 散乱の順問題：Zakharov-Shabat の固有値問題

式 (2.2a) を 2×2 の行列 S を用いて書き下した

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} -i\xi & i\psi^* \\ i\psi & i\xi \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

は、未知関数 $\psi(x, t)$ を散乱ポテンシャルとし、スペクトルパラメタ ξ を固有値とする散乱固有値方程式となっており、この固有値方程式を解く問題を Zakharov-Shabat の固有値問題 (ZS 問題) と呼ぶ [61]。以後、NLS 方程式の解として境界条件

$$\psi \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad (2.9)$$

を満たす解を考え、ZS 問題 (2.8) に対して適切な境界条件を設定する。

本論文では、空間的に局在した BEC のパルスを考えるが、そのようなパルスを記述する巨視的波動関数 ψ は $|x| \rightarrow \infty$ で振幅が速やかに 0 になることが期待される。そこで、以後 ψ は Schwartz クラスに属する急減少関数であることを仮定する。すると式 (2.8) は $x \rightarrow \pm\infty$ において

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} -i\xi & 0 \\ 0 & i\xi \end{pmatrix} \Psi \quad (2.10)$$

となるので、 Ψ は漸近的に平面波

$$\begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

の1次結合によって表される。ここで、境界条件

$$\phi(x; \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi}(x; \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (2.12a)$$

$$\chi(x; \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi x} \end{pmatrix}, \quad \bar{\chi}(x; \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (2.12b)$$

を満たす式(2.8)の解の組 $\{\phi, \bar{\phi}\}$ と $\{\chi, \bar{\chi}\}$ とを考える。これらはJost解と呼ばれる。

2成分ベクトル関数 f と g を、それぞれ固有値 ξ_1 と ξ_2 に対応する散乱固有値方程式(2.8)の解であるとする。行列式 W を

$$W\{f, g\} = f_1g_2 - f_2g_1, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

と定義すると、

$$\frac{d}{dx}W\{f, g\} = -i(\xi_1 - \xi_2)W\{f, g\} \quad (2.14)$$

が成り立ち、 $\xi_1 = \xi_2$ であるならば、 $W\{f, g\}$ は定数となる。Jost解の境界条件(2.12)から

$$W\{\phi, \bar{\phi}\} = 1 \quad (2.15a)$$

$$W\{\chi, \bar{\chi}\} = -1 \quad (2.15b)$$

となるから、 ϕ と $\bar{\phi}$ および χ と $\bar{\chi}$ はいずれも x によらず互いに1次独立であり、 $\{\phi, \bar{\phi}\}$ と $\{\chi, \bar{\chi}\}$ はそれぞれが方程式(2.2a)の基本解系となる。よって、両者は互いに線形結合

$$\phi(x; \xi) = a(\xi)\bar{\chi}(x; \xi) + b(\xi)\chi(x; \xi) \quad (2.16a)$$

$$\bar{\phi}(x; \xi) = \bar{a}(\xi)\chi(x; \xi) - \bar{b}(\xi)\bar{\chi}(x; \xi) \quad (2.16b)$$

によって表される。以後、スペクトルパラメタ ξ に依存する係数 $a(\xi)$ と $b(\xi)$ を散乱振幅と呼ぶ。散乱ポテンシャルである未知関数 ψ が急減少であれば、固有値 ξ

に属する固有関数 ϕ, χ は ξ の上半面 $\text{Im} \xi > 0$ に、 $\bar{\phi}, \bar{\chi}$ は下半面 $\text{Im} \xi < 0$ にそれぞれ解析接続される。式 (2.16) により、

$$W\{\phi, \chi\} = W\{a\bar{\chi} + b\chi, \chi\} = aW\{\bar{\chi}, \chi\} \quad (2.17)$$

となり、 $x \rightarrow -\infty$ での漸近形より $W\{\bar{\chi}, \chi\} = 1$ となるので、

$$a(\xi) = W\{\phi, \chi\} \quad (2.18)$$

が得られ、 $a(\xi)$ もまた、 $\text{Im} \xi > 0$ へ解析接続できる。一般に、散乱ポテンシャル ψ の形状に依存して束縛状態が生じ、 $a(\xi)$ はゼロ点を持ちうる。 $a(\xi)$ が $\text{Im} \xi > 0$ へ解析接続できることは、これらのゼロ点の集合が複素上半面の有界領域に離散的に分布した集合 $\{\zeta_l : l = 1, 2, \dots, N\}$ であることを保証している [48]。同様に、 $\bar{a}(\xi, t) = W\{\bar{\phi}, \bar{\chi}\}$ を得るので、 \bar{a} は $\text{Im} \xi < 0$ へ解析接続される。境界条件 (2.12) と式 (2.16) から、Jost 関数 $\phi(x; \xi)$ は漸近形

$$\phi(x; \xi) = \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi x} \\ b(\xi)e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (2.19)$$

をもつことがわかる。以上のように、与えられた ψ をポテンシャルにもつ線形散乱問題、すなわち ZS 問題 (2.8) を適切な境界条件のもとで解き、散乱振幅を求める問題を散乱の順問題と称する。

2.3 散乱の逆問題：Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式

散乱の順問題では、与えられた $\psi(x, t)$ をポテンシャルにもつ線形散乱問題として ZS 問題 (2.8) を適切な境界条件のもとで解き、散乱振幅を求めた。散乱の逆問題とは、これとは逆に散乱振幅 $a(\xi, t)$ と $b(\xi, t)$ を既知として、未知のポテンシャル関数 $\psi(x, t)$ を決定する問題である。一般に、散乱振幅 $a(\xi, t)$ と $b(\xi, t)$ は時刻 t における $\psi(x, t)$ に対応するものであるため、 t 依存性をもつ。

このような逆問題は Gel'fand、Levitan、Marchenko によって解かれた [62]。以下では、NLS 方程式 (2.5) に彼らの方法を適用する方法を説明する。まず、2つの

Jost 解 $\chi(x, t; \xi)$ と $\bar{\chi}(x, t; \xi)$ をそれぞれ

$$\chi(x, t; \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, z; t) e^{i\xi z} dz \quad (2.20a)$$

$$\bar{\chi}(x, t; \xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, z; t) e^{-i\xi z} dz \quad (2.20b)$$

と積分表示する。ただし、積分核 $K(x, z; t)$ と $\bar{K}(x, z; t)$ はいずれも 2 成分ベクトルであって、

$$K(x, z; t) = \begin{pmatrix} K_1(x, z; t) \\ K_2(x, z; t) \end{pmatrix} \quad (2.21a)$$

$$\bar{K}(x, z; t) = \begin{pmatrix} K_2^*(x, z; t) \\ -K_1^*(x, z; t) \end{pmatrix} \quad (2.21b)$$

と定義される。積分表示された Jost 解 (2.20) が ZS 問題の固有値方程式 (2.8) を満たすことから、

$$\begin{aligned} & \int_x^\infty [(\partial_x - \partial_z)K_1(x, z; t) - i\psi^*(x, t)K_2(x, z; t)]e^{i\xi z} dz \\ & - [i\psi^*(x, t) + 2K_1(x, x; t)]e^{i\xi x} + \lim_{z \rightarrow \infty} [K_1(x, z; t)e^{i\xi z}] = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

が得られる。式 (2.22) で整数 n を用いて $\xi = \xi_n = 2\pi n/x$ とおき、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考える。すると Riemann-Lebesgue の補題により積分を含む項が消えるため、

$$\lim_{z, n \rightarrow \infty} [K_1(x, z; t)e^{i\xi_n z}] = i\psi^*(x, t) + 2K_1(x, x; t) \quad (2.23)$$

でなくてはならないことがわかる。右辺の極限関数は変数 z の無限大への近づき方に関係しないから、 $z_m = xm/2$ として整数 $m \rightarrow \infty$ の極限を考える。そうすると

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} [K_1(x, z_m; t)(-1)^{mn}] = i\psi^*(x, t) + 2K_1(x, x; t) \quad (2.24)$$

となり、右辺が mn の偶奇によって振動しない関数となるためには、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_1(x, z_m; t) = 0 \quad (2.25)$$

でなくてはならない。このようにして、NLS 方程式の最終的な解が核関数 K_1 によって

$$\psi(x, t) = -2iK_1^*(x, x; t) \quad (2.26)$$

と表される。

次に核関数 K_1 に関する積分方程式 (GLM 方程式) の導出を説明する。まず、式 (2.16a) の両辺を散乱振幅 $a(\xi, t)$ で除した

$$\frac{\phi(x, t; \xi)}{a(\xi, t)} = \bar{\chi}(x, t; \xi) + \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} \chi(x, t; \xi) \quad (2.27)$$

を考える。次に、式 (2.20) を式 (2.27) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x, t; \xi)}{a(\xi, t)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, z; t) e^{-i\xi z} dz \\ &+ \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, z; t) e^{i\xi z} dz \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

を得る。スペクトルパラメタ ξ の複素上半面において、 $-\infty + i0$ から $a(\xi, t)$ の全てのゼロ点 $\{\zeta_l : l = 1, 2, \dots, N\}$ の上側を通って $\infty + i0$ に至る積分路 C を考える。この積分路 C に沿った複素積分を実行する積分作用素

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d\xi e^{i\xi y} \quad (y > x) \quad (2.29)$$

を式 (2.28) に作用させて、デルタ関数の積分表示を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\phi(x, t; \xi)}{a(\xi, t)} e^{i\xi y} d\xi &= \bar{K}(x, y; t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_C \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} e^{i\xi(x+y)} d\xi \\ &+ \int_x^\infty \left\{ \int_C \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} e^{i\xi(z+y)} d\xi \right\} K(x, z; t) dz \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。積分路 C は $a(\xi, t)$ の全てのゼロ点 $\{\zeta_l : l = 1, 2, \dots, N\}$ の上側を通っている。したがって、積分路 C と $\infty + i0$ から $-\infty + i0$ を反時計回りに結ぶ半径無限大の半円を合わせてできる閉曲線 (図 2.1 参照) の内部で、式 (2.30) の左辺は解析的である。

さらに、第 6 章の式 (6.7) で示すように、 $|\xi| \rightarrow \infty$ のとき $|a(\xi, t)| \rightarrow 1$ となるので、無限半円上の積分は 0 になる。結局、式 (2.30) の左辺に現れる積分路 C 上の積分値は 0 である。これを成分に分けて表記すると、

$$K_1^*(x, y; t) - F(x + y; t) - \int_x^\infty K_2(x, z; t) F(z + y; t) dz = 0 \quad (2.31a)$$

$$K_2^*(x, y; t) + \int_x^\infty K_1(x, z; t) F(z + y; t) dz = 0 \quad (2.31b)$$

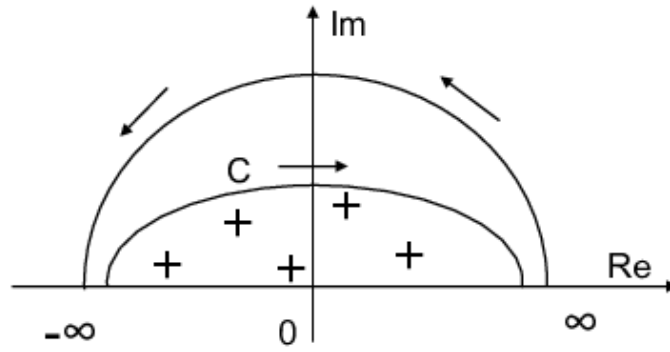


図 2.1: 式 (2.30) 左辺の線積分が 0 であることを示すための閉曲線

となり、Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式 (GLM 方程式) と呼ばれる。式中の $F(x; t)$ は、積分路 C と $\infty + i0$ から $-\infty + i0$ まで実軸上を走る積分路を合わせた閉曲線を考え、留数定理による計算を実行することで、

$$F(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi, t)}{a(\xi, t)} e^{i\xi x} d\xi - i \sum_{l=1}^N \frac{b(\zeta_l, t)}{a'(\zeta_l, t)} e^{i\zeta_l x} \quad (2.32)$$

のように与えられる。ここで $a'(\zeta_l, t)$ は ζ_l における $a(\xi, t)$ の微分係数であり、全ての離散固有値が散乱振幅 $a(\zeta_l, t)$ の 1 位の極であることを仮定している。以上のように、散乱振幅を既知として GLM 方程式を解くことによって、与えられた散乱振幅を発生させるような散乱ポテンシャルを再構成することができる。

2.4 逆散乱法とその適用範囲

これまで見てきた散乱の順問題と逆問題を組み合わせることによって、適当な境界条件の下でソリトン方程式の初期値問題を解く方法が構成できた。この一連の方法は逆散乱法と呼ばれている。時刻 t における散乱振幅 $a(\xi, t)$ と $b(\xi, t)$ がわかれば、ソリトン方程式の初期値問題の解 $\psi(x, t)$ は、形式的には常に構成することができる。すなわち、GLM 方程式を立てることができるようになり、初期値問題の解 $\psi(x, t)$ は GLM 方程式の解によって式 (2.26) の通り与えられる。

時刻 t における散乱振幅は $\psi(x, t)$ を散乱ポテンシャルとする ZS 問題 (2.8) から計算されるが、初期値問題を解くという観点からすると、時刻 t における $\psi(x, t)$ 自体が未知関数であるため、時刻 t での散乱振幅 $a(\xi, t)$ や $b(\xi, t)$ を直接求めることはできない。そこで、スペクトルパラメタ ξ が時間に依存せず、(2.8) が未知関数

$\psi(x, t)$ の時刻 t によらずに成立することに注意する。そして、特定の時刻 $t = 0$ において与えられた初期波束 $\psi(x, 0)$ をポテンシャルとした時の散乱振幅 $a(\xi)$ と $b(\xi)$ とをまず求めておく。

次に、系の時間発展に関する微分方程式 (2.2b) に着目する。この式は空間座標 x の至る所で成立してはならないから、 $x \rightarrow +\infty$ における漸近形の Jost 関数 $\phi(x, t; \xi)$ に対しても成り立つ。このとき、(2.2b) は $t = 0$ における散乱振幅 $a(\xi)$ と $b(\xi)$ の時間発展を記述する方程式となる。Jost 関数 $\phi(x, t; \xi)$ を

$$\phi(x, t; \xi) = \phi(x; \xi) e^{i\omega(\xi)t} \quad (2.33)$$

とにおいて、(2.2a) と (2.2b) が両立する解を探す。すると、 $x \rightarrow |\infty|$ での式からすぐに $\omega = 2\xi^2$ が得られる。一方 $x \rightarrow \infty$ での漸近式において散乱振幅に時間依存性をもたせた

$$\phi(x, t; \xi) = a(\xi, t) \bar{\chi}(x; \xi) + b(\xi, t) \chi(x; \xi) \quad (2.34)$$

からは容易に解ける微分方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{a}(\xi, t) e^{-i\xi x} \\ \dot{b}(\xi, t) e^{i\xi x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i\omega b(\xi, t) e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

が導かれる。これを解いて、任意の時刻 t における散乱振幅を初期時刻 $t = 0$ での散乱振幅を用いて

$$a(\xi, t) = a(\xi) \quad (2.36a)$$

$$b(\xi, t) = e^{-4i\xi^2 t} b(\xi) \quad (2.36b)$$

のように表すことができる。このようにして得られた時刻 t における散乱振幅を式 (2.32) に代入して GLM 方程式を解くことができれば、ソリトン方程式の初期値問題の解 $\psi(x, t)$ が求められる。以上が、逆散乱法の流れである。

しかし、実際に GLM 方程式を解析的に解くことができ、解を陽に書き下すことは一般には難しい。GLM 方程式が解ける例として、 $b(\xi) = 0$ かつただ1つの離散固有値 $\xi = \zeta + i\eta$ が存在する場合を考える。この場合、式 (2.32) の積分部分が消え、

$$F(x; t) = -ic_1 e^{i(\xi x - 4\xi^2 t)} \quad (2.37)$$

となる。ただし、初期波束中心と初期位相を決める定数 x_0 と、 θ_0 を導入して、

$$c_1 = -2\eta e^{2\eta x_0 + i\theta_0} \quad (2.38)$$

とおいた。このとき、GLM 方程式の解として

$$K_1^*(x, y; t) = \frac{-ic_1 e^{i\{\xi(x+y)-4\xi^2 t\}}}{1 + \frac{|c_1|^2}{4\eta^2} e^{-4\eta x + 16\zeta\eta t}} \quad (2.39)$$

が視察により得られるが [27]、このような簡単な場合においてさえも GLM 方程式の解を見いだすことは簡単ではない。離散固有値 $\xi = \zeta + i\eta$ のうち、実数部分 ζ がソリトンの速度を、虚数部分 η が振幅を決めるパラメタであり、この場合の 1-ソリトン解 $\psi_{1\text{sol}}(x, t)$ は

$$\psi_{1\text{sol}}(x, t) = 2\eta \operatorname{sech}[2\eta(x - x_0 - 4\eta t)] e^{2i\zeta x} e^{-4i(\zeta^2 - \eta^2)t + i\theta_0} \quad (2.40)$$

と書ける。一般に $b(\xi) = 0$ かつ $a(\xi)$ のゼロ点の数が N 個であれば、解は N 個のソリトンのみから構成され、 $\psi(x, t)$ は時間とともに拡散する成分を持たない。これら N 個のソリトンは独立したパルスとして振る舞い、相互作用しても位相ずれを生じるのみで、衝突前後の漸近的形状は不変に保たれる。

一方、 $b(\xi)$ が 0 でないときは式 (2.32) に現れる $F(x; t)$ がさらに複雑になり、解を陽に書き下すことは難しくなる。有限時刻 t においては一般に、 $t \rightarrow \infty$ でソリトンとして残留するパルス部分と、拡散して終状態での振幅が 0 となる部分（輻射と呼ばれる）とが共存している状態となる。そして、複数の初期パルスに由来する輻射と各ソリトン部分とが複雑に相互作用しあうため、終状態がどのようなものになるかは決して自明ではない。

最後に逆散乱法の流れを振り返る。逆散乱法では、初期波束 $\psi(x, 0)$ の情報をスペクトルパラメタ空間における散乱振幅 $a(\xi)$ と $b(\xi)$ の情報に一度変換し、スペクトルパラメタ空間で時間発展させてから実空間における波形情報 $\psi(x, t)$ を得た。この手続きは、線形偏微分方程式に対して Fourier 変換を施し、計算が容易である Fourier 空間で時間発展させられた Fourier 係数を逆 Fourier 変換することにより、最終的な実空間における解を得る方法に類似している。この意味で、逆散乱法は Fourier 変換法を拡張して、ソリトン方程式というクラスの非線形偏微分方程式に適用できるようにしたものともみなすことができる。この拡張が可能になった背景には、方程式 (2.2a) と (2.2b) がともに線形であり、線形系に対して確立した一般論が適用できることが大きく寄与している。しかし、元の非線形偏微分方程式の初期値問題を、線形方程式の組に分けることによって考察できるのは、少なくとも系に無限個の保存則が存在するような、極めて限られた系においてのみである。

実際、ZS 問題の散乱固有値方程式から無限個の保存則の存在を導くことができ

る。そのためにはまず、

$$\phi_1 = e^{-i\xi x + \hat{\phi}} \quad (2.41)$$

とにおいて、ZS 問題の散乱固有値方程式から Ψ_2 を消去して得られる方程式に代入する。そうすると、 $\hat{\phi}_x$ に関する Riccati 型方程式

$$2i\xi\hat{\phi}_x = (\hat{\phi}_x)^2 - |\psi|^2 + \psi \left(\frac{\hat{\phi}_x}{\psi} \right)_x \quad (2.42)$$

が得られる。ここで $|\xi| \rightarrow \infty$ のとき $|a(\xi, t)| \rightarrow 1$ となることと、Jost 関数の漸近形の式 (2.19) から $|\xi| \rightarrow \infty$ において $\hat{\phi}$ が消えることが期待されるので、

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2i\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(x, t)}{(2i\xi)^n} \quad (2.43)$$

のように $\hat{\phi}$ を展開する。そうすると漸化式として、

$$\begin{aligned} \mu_0 &= |\psi|^2 & \mu_1 &= \psi\psi_x \\ \mu_{n+1} &= \psi \left(\frac{\mu_n}{\psi} \right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mu_{n-k-1} \quad (n \leq 0) \end{aligned} \quad (2.44)$$

が得られる。再び Jost 関数の漸近形の式 (2.19) から

$$\log[a(\xi)] = \hat{\phi}(x \rightarrow \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(2i\xi)^{n+1}} \quad (2.45)$$

となる。ただし、 $C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n dx$ である。上で見たように $a(\xi, t) = a(\xi)$ であったから、 ξ の複素上半面において $a(\xi, t)$ は実は時間に依存せず、 C_n もまた時間によらない無限個の大域的な運動の定数となる。したがって、少なくとも無限個の対称性が系に内在していなければ逆散乱法が適用できないことが Noether の定理よりわかる。ここで、 C_0 は系の保存ノルムを表している。また、 C_1 は系で保存される運動量を意味しているから、並進対称性が破れた系においては一般的に逆散乱法を適用することができないこともわかる。

ただし、外力ポテンシャルの形が空間座標の 1 次式もしくは 2 次式で表される大域的なものである場合には、巧みな変数変換によって逆散乱法の流れに適合させることが例外的に可能である場合がある。そのような場合、初期波束をソリトン解に相当する特殊なものにとれば、パルスの時間発展に関してある程度解析的な予言ができることが知られているが [63, 64]、本論文で着目する空間的に局在した散乱ポテンシャルが存在する場合にはこれらの方法はもちろん使えない。

第3章 TDGP 方程式の1次元ポテンシャル散乱問題

3.1 時間に依存するポテンシャル散乱問題の定式化

1次元 TDGP 方程式

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + V(x)\psi + g|\psi|^2\psi \quad (3.1)$$

において、外力ポテンシャル $V(x)$ が空間的に局在した関数で与えられていて、系の並進対称性と可積分性が破られているとする。そのようなポテンシャルとして、幅 a をもつ箱型ポテンシャル V_{box} と井戸型ポテンシャル V_{well} を考え、それぞれ

$$V_{\text{box}} = \theta(x) - \theta(x - a) \quad (3.2)$$

$$V_{\text{well}} = -V_0(\theta(x) - \theta(x - a)) \quad (3.3)$$

と表す。ただし、 $\theta(x)$ はステップ関数、 V_0 は井戸型ポテンシャル V_{well} の井戸の深さを表すパラメタである。BEC の実験で通常使われる原子捕捉用トラップは、空間座標の2次関数で精度よく近似できる。したがって、Feshbach 共鳴によって粒子間相互作用を小さく抑制すると、トラップ内の BEC の巨視的波動関数は Gauss 型となる。そこで初期波束 $\psi(x, 0)$ の形状として Gauss 型を選定し、これが $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x, 0)|^2 dx = 1$ を満たすように BEC の全粒子数 N で規格化して

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+x_0)^2 + iv(x+x_0)} \quad (3.4)$$

を初期波束とする。初期波束中心の座標は $-x_0$ である。初期波束の初速 $2v$ は、トラップから解放された BEC に向けて局所ポテンシャルの方を相対的に移動させるか、BEC に位相印加する方法 [41] によって与えられる。

TDGP 方程式 (3.1) で外力ポテンシャル項を無視すると NLS 方程式 (1.1) となるが、初期波束 (3.4) はいかなる g に対しても (1.1) のソリトン解にならない。したがって初期波束中心 $-x_0$ からポテンシャル相互作用領域まで伝搬する間、初期波

束は絶えず輻射を放出してその形状を変化させ続ける。波束形状が変化する程度は伝搬距離に依存する。このような波束形状の変化が散乱現象に及ぼす影響を比較するために、 x_0 が大きい場合と小さい場合の2通りを考える。この点に関して、局所ポテンシャルによる散乱を調べた先行研究では、初期波束とポテンシャルの距離を固定していたり、初期条件として波束形状が変化しない1-ソリトン解を用いていたため [56–59]、伝搬中の波束形状の変化の影響は調べられていない。

散乱の結果を評価する指標として、ポテンシャルからの反射率と透過率を

$$R_{\text{box}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 |\psi|^2 dx \quad (3.5)$$

$$T_{\text{well}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{a+b}^{\infty} |\psi|^2 dx \quad (3.6)$$

と定義する。このような反射率や透過率が意味をもつためには、 ψ のノルムが保存されている必要がある。散乱ポテンシャル $V(x)$ が存在しない NLS 方程式において、 ψ のノルムが保存されることを第2章で示したが、 ψ のノルムは散乱ポテンシャルが存在している TDGP 方程式でも同様に保存される。このことは、(3.1) の直接代入により

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (\psi_t \psi^* + \psi \psi_t^*) dx = 0 \quad (3.7)$$

となることで示される。

全空間でノルムが保存しているにも関わらず、反射率 (3.5) 以外に透過率 (3.6) を定義した理由は以下の通りである。本章第2節で述べるように、井戸型ポテンシャル (3.3) の場合、その深さ V_0 に応じて波束の一部が井戸内に捕捉され、反射率の計算領域内にそのノルムを放出しながら井戸内を振動する現象が発生することがある。これによって、反射率 (3.5) が収束せず増加を続ける一方、捕捉された振動波束の裾が $x > a$ の領域内に周期的に侵入・離脱を繰り返し $x > a$ でのノルムも振動する。そこで、透過率 T_{well} の定義式に、振動波束の裾を避けるためのマージン b を設ける。

このような設定のもとで、非線形自己相互作用の強さが反射率や透過率にどのような影響を与えるかを調べるため、様々な結合定数 $g < 0$ の値をもつ TDGP 方程式 (3.1) の数値積分を行う。これは、BEC に磁場を印加することによって Feshbach 共鳴を起こし、自己相互作用の強さを決める定数 g の大きさを変化させることに対応する。波動関数 ψ の規格化条件 $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$ が変わるわけではない。

TDGP 方程式 (3.1) は、系の Hamiltonian

$$H = \int_{\mathbb{R}} \left[|\psi_x|^2 + V(x)|\psi|^2 + \frac{1}{2}g|\psi|^4 \right] dx \quad (3.8)$$

から正準形式の手続きによって導かれる Hamilton 力学系であるため、 H は系の保存量となる。このことを考慮して、数値積分する際のアルゴリズムとして H の保存性に優れた Symplectic-Fourier 法 [65] を採用する。

3.2 数値計算結果

3.2.1 自由伝搬

まず、式 (3.4) で与えられる Gauss 型初期波束の時間発展がソリトン解のそれと大きく異なることを示すため、散乱ポテンシャル $V(x)$ を 0 とおいて波束の自由伝搬の様子を調べる。TDGP 方程式 (3.1) で $V(x) = 0$ とおいて得られる NLS 方程式の 1-ソリトン解は第 2 章の式 (2.40) で与えられている。一般の $g < 0$ に対しては波動関数のスケール変換を行って

$$\psi_{1\text{sol}}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{-g}} 2\eta \operatorname{sech}[2\eta(x - x_0 - 4\eta t)] e^{2i\zeta x} e^{-4i(\zeta^2 - \eta^2)t + i\theta_0} \quad (3.9)$$

となる。この 1-ソリトン解を初期条件に選ぶと、その波形 $|\psi_{1\text{sol}}(x, t)|^2$ は拡散することなく、形状を変えずに伝搬する。図 3.1 は $x_0 = 20$ とした Gauss 型初期波束 (3.4) が自由伝搬する様子を示したもので、左から右へ $t = \{0, 2, \dots, 14, 16\}$ における波形 $|\psi(x, t)|^2$ が描かれている。結合定数は $g = -4$ である。波束の振幅が伝搬中に振動している点が、1-ソリトン解 $\psi_{1\text{sol}}(x, t)$ の場合と大きく異なっている。

波束 $\psi(x, t)$ の Fourier 変換 $\tilde{\psi}(k, t)$ は

$$\tilde{\psi}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{ikx} dx \quad (3.10)$$

で定義される。図 3.2 に $t = 16$ における $|\tilde{\psi}(k, t)|^2$ を示す。図 3.2 中の破線は初期波束の Fourier 変換 $|\tilde{\psi}(k, 0)|^2$ である。 $|\tilde{\psi}(k, 16)|^2$ と $|\tilde{\psi}(k, 0)|^2$ の比較から、運動量空間においても振幅の変動が見られるほか、波形に細かい鋸状の構造が形成されていることが注目される。解析的にわかるように、ソリトン解 $\psi_{1\text{sol}}(x, t)$ の Fourier 変換はやはり sech 関数の包絡線をもつので、ソリトン解ではこのような構造は形成されない。このように、運動量空間においても Gauss 型初期波束とソリトン解

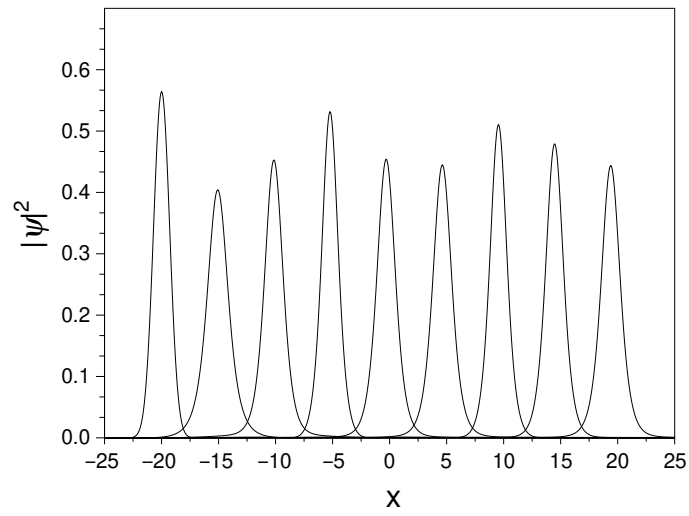


図 3.1: 式 (3.4) の Gauss 型初期波束 ($x_0 = 20$, $v = \sqrt{1.5}$, $g = -4$) の自由伝搬。9 個の波束は $|\psi(x, t)|^2$ を時系列に沿って描いたもので、左から右へ $t=0, 2, \dots, 14, 16$ 。

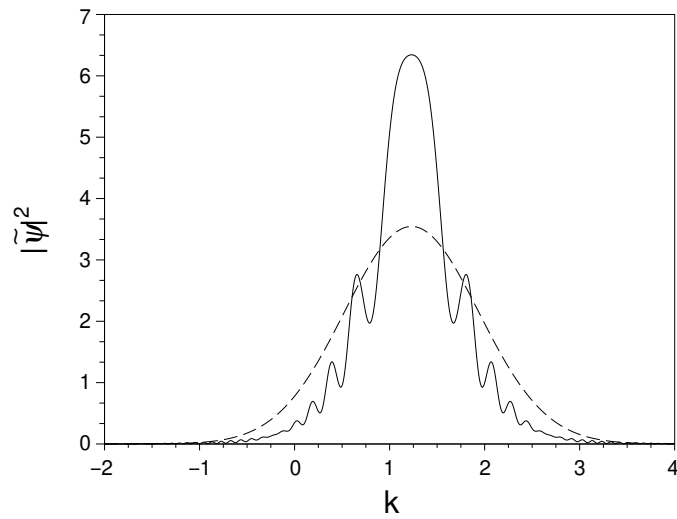


図 3.2: 運動量空間における自由伝搬波束の波形 $|\tilde{\psi}(k, t)|^2$ 。実線は $t = 16$ 、破線は $t = 0$ のときのもの。Gauss 型初期波束を規定するパラメタは図 3.1 における値と同じ ($x_0 = 20$, $v = \sqrt{1.5}$, $g = -4$)。

の大きな違いが現れる。また $g = 0$ の場合、実空間で $|\psi(x, t)|^2$ は単純に拡散し、運動量空間での $|\psi(\tilde{k}, t)|^2$ は変化しない。したがって、このような鋸状構造の生成は真に非線形性に起因する。この現象は第4章で詳しく解析する。

3.2.2 箱型ポテンシャル

散乱ポテンシャル $V(x)$ を箱型ポテンシャル (3.2) とし、これに Gauss 型初期波束 (3.4) を初速 $2v = 2\sqrt{1.5}$ で入射させる。初期波束の中心座標を表す x_0 は $x_0 = 5$ のときと $x_0 = 100$ のときの2通りを考え、反射率 R_{box} が結合定数 g とポテンシャル幅 a にどのように依存するかを調べる。初期波束 (3.4) の絶対値2乗が中心の e^{-2} に減衰する全幅は $2\sqrt{2} \sim 2.83$ であるから、 $x_0 = 5$ は概ね初期波束幅の1個分、 $x_0 = 100$ は20個分の距離だけポテンシャル端点 $x = 0$ から離れた位置に初期波束中心をおくことに相当する。図3.3は $x_0 = 5$ の場合、図3.4は $x_0 = 100$ の場合の結果を表すグラフである。どちらの図も横軸にポテンシャル幅 a をとり、縦軸に反射率 R_{box} をとっている。線種の違いは結合定数 g の別を表しており、数値積分を行った $g = \{-2, -4, -6, -8\}$ の各ケースに加えて、 $g = 0$ の実線は量子力学の定常解から得られる解析的な反射率

$$R_s = \left[1 + \frac{4\nu^2(\nu^2 - 1)}{\sin^2(a\sqrt{\nu^2 - 1})} \right]^{-1} \quad (3.11)$$

を表す [66]。ただし、平面波の入射波数 ν は波束の初速を表すパラメタ $v = \sqrt{1.5}$ に等しいとおき、ポテンシャルの幅 a は0.5刻みで0から10までの各場合に対して計算を行う。

条件 $\sin(a\sqrt{\nu^2 - 1}) = 0$ が満たされると $R_s = 0$ の完全透過が実現する。これは入射波と反射波の干渉による一種の共鳴散乱で、 a の増加とともに周期的に起こる。定常的な平面波ではなく波束を用いる計算では、入射波の単色性が失われて共鳴から外れる運動量を含むようになるため、すべてのケースで完全透過が消失している。しかし、この点を除いても TDGP 方程式 (3.1) を直接数値積分して計算された反射率 R_{box} の振る舞いは、量子力学の結果 (3.11) と大きく異なる。まず、 $g = -2$ の場合を除き R_{box} の最大値は線形の場合よりも小さい。次に、 R_{box} はポテンシャル幅 a の増大と共にわずかに振動したあと、一定の値に収束するように振る舞い、ポテンシャル幅 a の増加とともに周期的に反射率が増減する構造が失われている。たとえ波束を考えた場合であっても、線形の量子力学では時間的に運

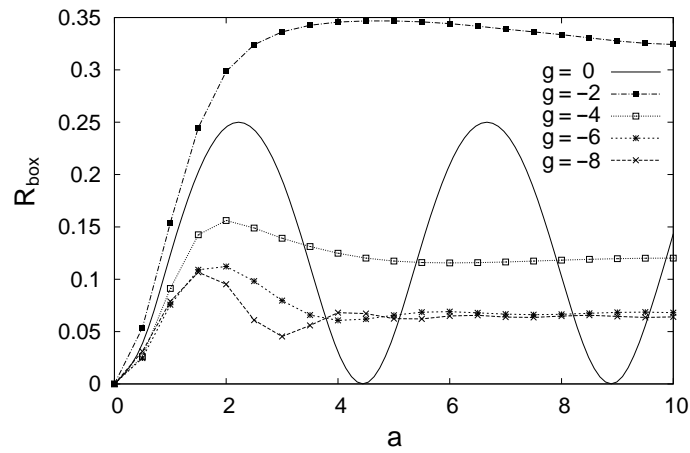


図 3.3: 箱型ポテンシャルにおいて結合定数 g を変化させた場合の反射率 R_{box} の変化。Gauss 型初期波束を規定するパラメタは $g = 0$ の曲線を除き $x_0 = 5$ と $v = \sqrt{1.5}$ 。 $g = 0$ の曲線は式 (3.11) で与えられる量子力学の定常解による反射率。

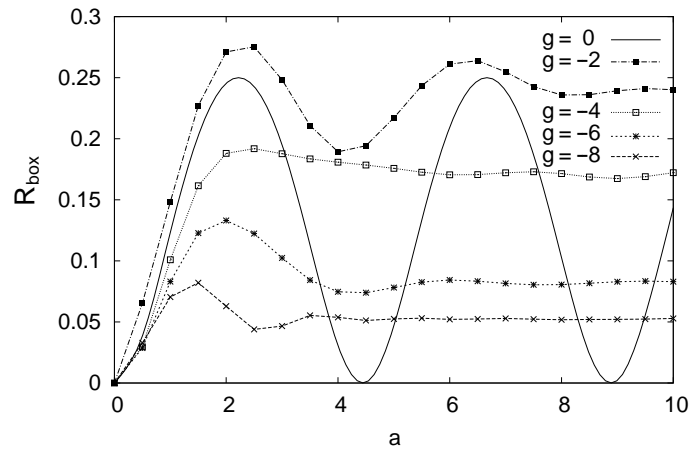


図 3.4: 箱型ポテンシャルにおいて結合定数 g を変化させた場合の反射率 R_{box} の変化。Gauss 型初期波束を規定するパラメタは $g = 0$ の曲線を除き $x_0 = 100$ と $v = \sqrt{1.5}$ 。 $g = 0$ の曲線は式 (3.11) で与えられる量子力学の定常解による反射率。

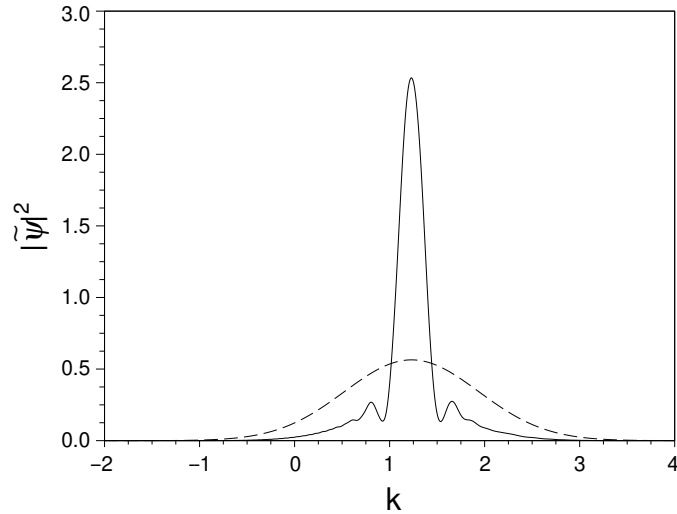


図 3.5: 幅 $a = 0.5$ の箱型ポテンシャルと相互作用する波束の運動量空間における波形 $|\tilde{\psi}|^2$ 。Gauss 型初期波束を規定するパラメタは $g = 0$ の曲線を除き $x_0 = 100$ と $v = \sqrt{1.5}$ で、結合定数は $g = -2$ 。実線は時刻 $t = 26$ 、破線は時刻 $t = 0$ における波形。

動量空間スペクトルが一定であるため、周期的な透過率の増減が期待される。したがって、このような構造の消失は、系の自己収束型非線形相互作用が波束の粒子的側面を強めることによって引き起こされたと考えられる。

もう 1 つの顕著な事実は、 g が 0 でない場合に $x_0 = 5$ の場合を表す図 3.3 のグラフと、 $x_0 = 100$ の場合を表す図 3.4 のグラフが大きく違っていることである。つまり、 R_{box} が Gauss 型初期波束が置かれた位置、すなわち出発地点からポテンシャルまでの距離に依存している。図 3.5 は、結合定数 $g = -2$ で幅 $a = 0.5$ の箱型ポテンシャルに入射する波束 $|\psi(\tilde{k}, t)|^2$ である。実線が $t = 26$ のとき、破線が $t = 0$ のときの波形で、これら 2 つの波形を比較すると、自由伝搬中に波束を構成する Fourier スペクトルが大きく変わっていることがわかる。時刻 $t = 26$ は拡散する輻射が散乱ポテンシャル領域に到達し始める時刻に相当し、波束がポテンシャルと相互作用を始めるタイミングにおける Fourier スペクトルの形状は伝搬距離 x_0 と入射速度 $2v$ に依存する。ポテンシャル散乱の結果は、波束の Fourier スペクトルに大きく左右されるため、反射率が入射波束の伝搬距離によって変化したものと考えられる。

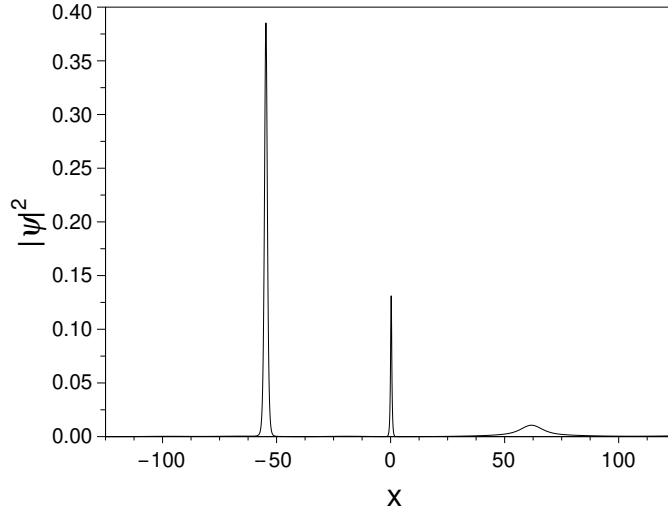


図 3.6: 幅 $a = 0.5$ の井戸型ポテンシャル (3.3) に捕捉された部分をもつ波形の例。原点付近の波形が捕捉された成分。Gauss 型初期波束 (3.4) を規定するパラメタは $x_0 = 5$ 、 $v = \sqrt{1.5}$ で、結合定数は $g = -8$ 。この図は時刻 $t = 30$ における波形で、透過率 T_{well} は 0.233。

3.2.3 井戸型ポテンシャル

散乱ポテンシャル $V(x)$ を深さ $V_0 = 10$ をもつ井戸型ポテンシャル (3.3) とし、それに向かって Gauss 型初期波束 (3.4) を入射させる。箱型ポテンシャルのときと同様に、入射波束の初速を $2v = 2\sqrt{1.5}$ とし、初期波束の中心座標が $x_0 = 5$ の場合と $x_0 = 100$ の場合の 2 通りを調べる。また、結合定数は $g = \{-2, -4, -6, -8\}$ 、ポテンシャルの幅 a は 0.5 刻みで 0 から 10 までの各場合に対して計算を行う。井戸型ポテンシャルの場合には、第 1 節で述べたように「長時間経過後も波束の一部がポテンシャル井戸に捕捉されたままになる現象」が起こる場合がある。図 3.6 は幅 $a = 0.5$ の井戸型ポテンシャル (3.3) に捕捉された部分をもつ波形 $|\psi(x, t)|^2$ の例で、Gauss 型初期波束 (3.4) において $x_0 = 5$ とし、結合定数 $g = -8$ で時間発展させて得られた。図では、井戸型ポテンシャルが存在している領域 $0 < x < 0.5$ に単峰性のパルスが残留している。図 3.7 は、図 3.6 と同じ初期波束を結合定数 $g = -4$ で時間発展させた場合である。幅 $a = 5$ の井戸型ポテンシャル (3.3) の内部に定常波状の波形が観察できる。ソリトン型初期波束からスタートした場合に、波束全体が井戸型ポテンシャルに捕捉された報告例があるが [57]、本研究では、初期波束は大きく分けて反射成分と透過成分と捕捉成分の 3 部分に分かれている。

このような状態が本当の最終状態かどうかは数値計算からは判断できず、長い中間状態の可能性もある。定常波状の波束は井戸内で微小な振動を繰り返しており、

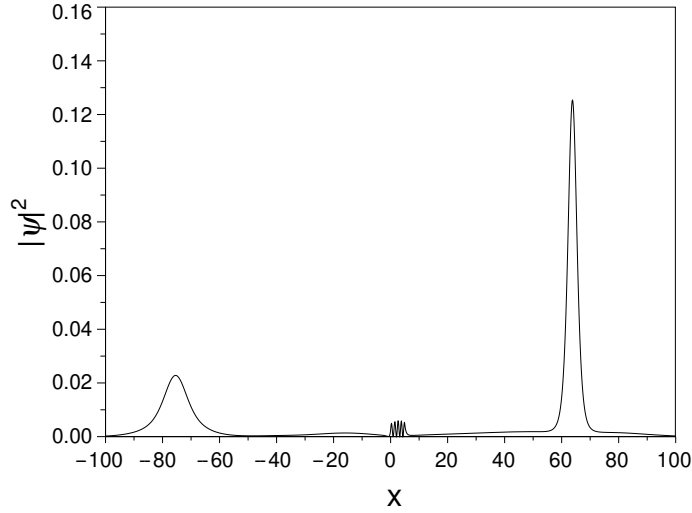


図 3.7: 幅 $a = 5.0$ の井戸型ポテンシャル (3.3) に捕捉された部分をもつ波形の例。原点付近の捕捉波形は定在波のような構造を示している。Gauss 型初期波束 (3.4) を規定するパラメタは $x_0 = 5$ 、 $v = \sqrt{1.5}$ で、結合定数は $g = -4$ 。この図は時刻 $t = 30$ における波形で、透過率 T_{well} は 0.640。

主に $x < 0$ の領域に向かって僅かにノルムの一部を放出している。さらに、捕捉された振動波束の裾が $x > a$ の領域内に周期的に侵入・離脱を繰り返し $x > a$ でのノルムも振動する。そこで、計算可能領域の端点に拡散波束が到達するまでに T_{well} の振動がほぼなくなるよう、振動する波束の裾を避けるためのマージン $b = 30$ を付与した式 (3.6) によって透過率 T_{well} を定義する。そして、 T_{well} が結合定数 g とポテンシャル幅 a にどのように依存するかを調べる。

図 3.8 は $x_0 = 5$ の場合、図 3.9 は $x_0 = 100$ の場合の結果を表すグラフである。どちらの図も横軸にポテンシャル幅 a をとり、縦軸に透過率 T_{well} をとっている。線種の違いは箱型ポテンシャルのときと同様に結合定数 g の別に対応するが、 $g = 0$ の実線は量子力学の定常解から得られる解析的な透過率

$$T_s = \left[1 + \frac{100 \sin^2(a\sqrt{\nu^2 + 10})}{4\nu^2(\nu^2 + 10)} \right]^{-1} \quad (3.12)$$

である [66]。ただし、ここでも平面波の波数 ν は入射波束の初速を決めるパラメタ $v = \sqrt{1.5}$ に等しいとおいた。条件 $\sin(a\sqrt{\nu^2 + 10}) = 0$ が満たされると $T_s = 1$ の完全透過が実現する。これも入射波と反射波の干渉による一種の共鳴散乱で、 a の増加とともに周期的に共鳴散乱が起こる。

さて、結合定数 g が 0 でない場合に数値積分から得られた波束散乱の結果は箱型ポテンシャルのときと定性的に似た特徴をもつ。まず、箱型ポテンシャルのときと同様の理由により、すべてのケースで完全透過が消失している。さらに、透

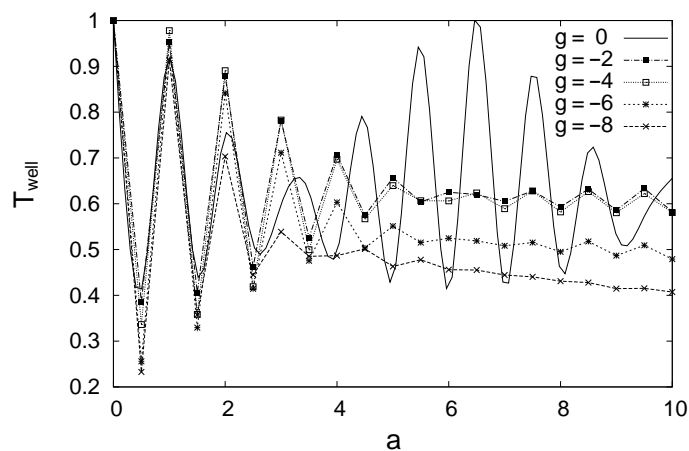


図 3.8: 様々な結合定数 g に対する井戸型ポテンシャル (3.3) の透過率 T_{well} 。Gauss 型初期波束 (3.4) を規定するパラメタは $x_0 = 5$ と $v = \sqrt{1.5}$ 。図中で $g = 0$ の曲線は式 (3.12) で与えられる量子力学の定常解による透過率。

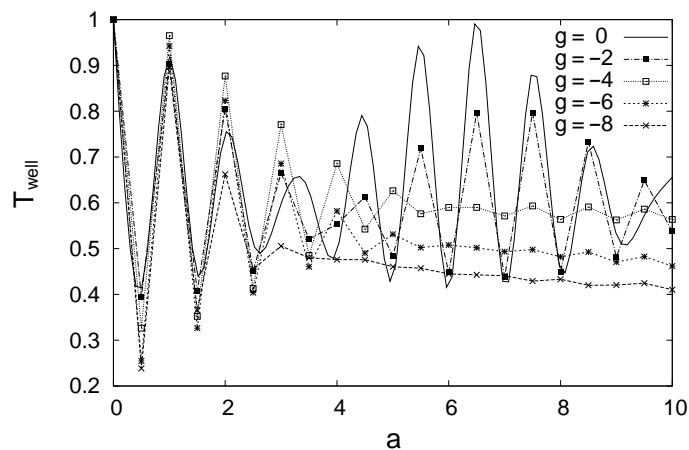


図 3.9: 様々な結合定数 g に対する井戸型ポテンシャル (3.3) の透過率 T_{well} 。Gauss 型初期波束 (3.4) を規定するパラメタは $x_0 = 100$ と $v = \sqrt{1.5}$ 。図中で $g = 0$ の曲線は式 (3.12) で与えられる量子力学の定常解による透過率。

過率 T_{well} はポテンシャル幅 a の増大と共に 2 ~ 3 回振動したあと、一定の値に近づくように振る舞い、共鳴散乱に起因する周期的な透過率の振動が抑制されている。これは、箱型ポテンシャルのときと同様の理由により、系の自己収束型非線形相互作用が波束の粒子的側面を強めることによって引き起こされたものと考えられる。透過率 T_{well} は Gauss 型初期波束中心と散乱ポテンシャルの距離 x_0 に依存して異なった振る舞いを見せている点も箱型ポテンシャルのときと共通しており、波束がポテンシャルと相互作用を始めるタイミングにおける Fourier スペクトルの形状が伝搬距離 x_0 と入射速度 $2v$ に依存して変化するためと説明できる。

3.3 議論

3.3.1 TDGP 方程式によるポテンシャル散乱問題の特徴

TDGP 方程式 (3.1) にしたがって引力自己相互作用する Gauss 型初期波束 (3.4) を局所的な散乱ポテンシャルに入射させた場合、反射率や透過率が初期波束中心の位置を表すパラメタ x_0 と初速を表すパラメタ v の関数になることがわかった。この現象は、2つの要因から説明される。

1つめは、単純な波束効果である。Schrödinger 方程式のポテンシャル散乱問題においても、ポテンシャルと相互作用する時点における波束の拡散度合いに応じて反射率や透過率は変化するから、反射率や透過率は x_0 や v に依存することになる。これを単純な波束効果と呼ぶことにする。2つめは単純な波束効果では説明できず、真に非線形波束効果と呼ぶべき効果である。単純な波束効果によって反射率や透過率が x_0 や v に依存するといえども、時間的に運動量空間スペクトルが一定であれば、ポテンシャル幅 a の変化に伴って反射率や透過率が周期的に変動することが期待される。ところが、箱型と井戸型どちらのポテンシャルの場合においても、ポテンシャル幅 a の増加に伴う反射率や透過率の周期的変動が抑制される振る舞いが見られた。これは、波束がポテンシャルと相互作用を始めるまでにその形状や Fourier スペクトルを変化させることによるものであって、系の非線形性がある初めて起きる現象である。非線形波束効果は、Gauss 型初期波束に限らず一般の非ソリトン型波束を初期条件にとった場合でも同様に起こると考えられ、非線形発展方程式による波束のポテンシャル散乱を特徴付けるものである。

ただし、結合定数 g の正負によって単純な波束効果や非線形波束効果の出現の仕方は異なる。本論文で取り扱った $g < 0$ の場合、初期波束の振幅が十分大きけ

れば $t \rightarrow \infty$ でソリトンとなる部分を含み、この部分はどんなに長距離を伝搬しても拡散せずそのままポテンシャルに侵入する。したがって、単純な波束効果が無視できるようになることはない。また、図 3.1 で示したように、波形が終状態で生成されるソリトンに向かって過渡的な振動をする段階では、振動 1 周期の間に伝搬する距離の整数倍だけ x_0 を変動させたときに、同様の傾向をもつ反射率および透過率のグラフが得られることが予想される。一方、結合定数 $g > 0$ をもち斥力自己相互作用する波束の場合は、波束の周期的振動は起こらず、伝搬中単に拡散していくのみである。したがって、十分長距離を伝搬させれば単純な波束効果は無視できるようになると考えられる。また、拡散して小振幅となった部分からの高調波励起は小さくなるので、 x_0 が十分大きければ x_0 に応じて非線形波束効果が周期的に変動することもないと予想される。さらなる数値計算によって、これらの予想を確認することはこれからの課題である。

3.3.2 ポテンシャル井戸による波束の捕捉現象

井戸型ポテンシャルによって自己収束性波束が捕捉されてしまうケースがある。量子力学では、初期状態から最終状態への波束の時間発展は、散乱状態固有関数の完全系の重ね合わせによって

$$|\psi(0)\rangle = \int c_\lambda |E_\lambda\rangle d\lambda \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \int c_\lambda e^{-iE_\lambda t} |E_\lambda\rangle d\lambda \quad (3.13)$$

と記述される。ここで λ は連続的なエネルギー固有値であり、積分は全ての連続的なエネルギー固有値にわたって行われる。したがって、散乱固有状態と束縛固有状態のエネルギーレベルが交差しないため、初期に散乱状態にあった波束の一部が捕捉されて束縛状態に移行することは起こり得ない。しかし、TDGP 方程式のように非線形自己相互作用が存在するケースでは、式 (3.8) で表される Hamiltonian H の構成要素である運動エネルギー K

$$K = \int |\psi_x|^2 dx \quad (3.14)$$

と常に負値をとる自己相互作用エネルギー I

$$I = \frac{1}{2}g \int |\psi|^4 dx \quad (3.15)$$

の間で常にエネルギーのやりとりがなされている。例えば、図 3.1 の波束の自由伝搬において波形の勾配が急峻なときは K が増加し、 I が減少する。さらに、散乱

ポテンシャルと波束の重なりが存在する領域では、ポテンシャルエネルギー

$$V = \int_0^a V(x)|\psi|^2 dx \quad (3.16)$$

が発生する。図 3.6 と図 3.7 からわかるように、捕捉された波束の部分は他の部分とほぼ分離しているから、散乱ポテンシャル領域における局所的な系のエネルギー汎関数 E_{local} を

$$E_{\text{local}} = (K + I + V)_{\text{local}} = \int_0^a (|\psi_x|^2 + V(x)|\psi|^2 + \frac{1}{2}g|\psi|^4) dx \quad (3.17)$$

のように定義することができる。実際に式 (3.17) を図 3.6 や図 3.7 で示した波形に対して計算すると負の値になっており、一種の束縛状態が形成されていることがわかる。この状態は初期状態から存在していたものではなく、系の非線形な時間発展に伴うエネルギー配分の変化によって発生した動力的な遷移の結果である。数値計算によってこの状態が単に過渡的な準安定束縛状態なのか永続的に続く真の束縛状態なのかを判定することは困難であるが、このような捕捉状態の有無の証明は解析的に大変興味深い問題である。

第4章 非ソリトン型初期波束の運動 量空間波形におけるパターン 形成

4.1 運動量空間におけるパターン生成のメカニズム

第3章で明らかになったように、十分な振幅をもつ非ソリトン型初期波束を時間発展させると、運動量空間における波形に鋸状のパターンが形成される。このパターン形成にとって、TDGP 方程式 (3.1) に含まれていた外力ポテンシャル項は本質的ではなく、パターン生成のメカニズムは標準的な NLS 方程式

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi \quad (4.1)$$

を用いて説明できる。本章で用いる NLS 方程式 (4.1) の係数は、第3章で用いたものと異なり、BEC を用いた多数の実験で使用されている慣習に合わせた。この係数の取り方は、様々な振幅をもつ sech 型の初期条件に対して ZS 問題 (2.8) を厳密に解いた論文 [42] で使われている方式とも一致する。ZS 問題 (2.8) の解が離散固有値を含んでいる場合、対応するパルスは非常にロバストであり、初期波束は最終的にソリトンとなる部分と低振幅で素早く拡散する輻射部分に分かれ、全体のノルムが $\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx = 1$ を満たすとき、ソリトン部分のノルムは $O(1)$ に留まる [42]。

以下、鋸状パターンが形成されるメカニズムの概略を説明する。まず全体の巨視的波動関数 ψ をソリトンとなる部分 ψ_{sol} と輻射部分 ψ_{rad} との和で

$$\psi = \psi_{\text{sol}} + \psi_{\text{rad}}, \quad \psi_{\text{sol}} = g(x)e^{i\theta(x)}, \quad \psi_{\text{rad}} = h(x)e^{i\theta(x)} \quad (4.2)$$

と表す。2つの構成要素 ψ_{sol} と ψ_{rad} はいずれも同一の巨視的波動関数の一部であるので、定まった共通の位相 $\theta(x)$ を持たなくてはならず、実空間で2つの構成要素の干渉効果が現れることはない。しかし、これら2つの構成要素の Fourier 変換 $\tilde{\psi}_{\text{sol}}$ と $\tilde{\psi}_{\text{rad}}$ は、 $g(x)$ と $h(x)$ の関数形が異なることから、相異なる位相をもつ。し

たがって、運動量空間では両者の干渉現象が発生し、これが鋸状パターンとなる。以上が干渉縞生成のメカニズムの流れである。以後、簡単なモデルを用いた具体的計算例を示す。

4.2 近似モデルによる計算

初期波束の振幅が十分に大きく、2つの離散固有値が存在する場合、終状態には2-ソリトンの束縛状態が形成される。実際、このようなソリトンの束縛状態はすでに非線形光学ファイバ中の実験で観測されている [67]。一般に、波束中心は一定の群速度で移動していくが、本章で議論しているパターン形成現象にとって有限の群速度は本質的ではないため、Galilei 変換を利用して波束中心が $x = 0$ に留まり続けるとする。このような条件を満たす初期波束は実数値をとる偶関数で、2つの離散固有値に対応した2つのパルスは分離せず、原点付近で振動を繰り返す。

以下、上の条件を満たす2種類の初期波束を考察する。第1の初期条件は sech 関数型で、

$$\psi_1(x, 0) = 2 \operatorname{sech}(x) \quad (4.3)$$

とする。この初期波束 $\psi_1(x, 0)$ は厳密な2-ソリトン束縛状態であり、その時間発展は解析的に

$$\psi_1(x, t) = 4 \exp\left(-\frac{it}{2}\right) \frac{\cosh(3x) + 3 \exp(-4it) \cosh(x)}{\cosh(4x) + 4 \cosh(2x) + 3 \cos(4t)} \quad (4.4)$$

と書ける。この解の波形 $|\psi_1(x, t)|^2$ は周期 $\pi/2$ で振動し、厳密なソリトン解であるので輻射は放出されない。

第2の初期条件は、初期条件 $\psi_1(x, 0)$ と同じ中心振幅と同程度の幅をもつ Gauss 型波束

$$\psi_2(x, 0) = 2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (4.5)$$

である。第3章でも触れたように、初期波束 $\psi_2(x, 0)$ は BEC の実験において生成しやすい形状であるが、厳密なソリトンの形状からはわずかにずれている。その波形は ψ_1 と同様に振動しながら時間発展するが、 ψ_2 の場合は時間発展の過程で輻射を放出する。

ここで、どちらの初期波束においても振動するソリトン部分は原点付近に局在し、ほぼ単一の周期 $\omega = \pi/2$ で振動しているとして、 $\psi_{\text{sol}}(x, t)$ を

$$\psi_{\text{sol}}(x, t) = e^{-\frac{1}{2}x^2} [3 + \cos(4t)] \quad (4.6)$$

と近似する。一方、初期波束 $\psi_2(x, 0)$ の場合に存在する輻射部分は振幅が小さく3次の非線形項がほとんど効かないことから、輻射部分の波動関数 $\psi_{\text{rad}}(x, t)$ を線形の Schrödinger 方程式にしたがう波束として考えることができる。すでに述べたように波束は全体としては原点 $x = 0$ にとどまるので、群速度が0になる。したがって、

$$\psi_{\text{rad}}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-\frac{i}{2}k^2 t} e^{ikx} dk \quad (4.7)$$

と近似できる。ここで $\tilde{f}(k)$ は運動量 k に関する偶関数で実の値をとる。運動量空間での波動関数は実空間での波動関数を Fourier 変換することによって得られる。

以上より、ソリトン部分と輻射部分が運動量空間で干渉してできる波形 $|\tilde{\psi}|^2$ は

$$|\tilde{\psi}|^2 = |\tilde{\psi}_{\text{sol}} + \tilde{\psi}_{\text{rad}}|^2 \quad (4.8)$$

となる。ただし、 $\tilde{\psi}_{\text{sol}}$ と $\tilde{\psi}_{\text{rad}}$ はそれぞれソリトン部分の波動関数 (4.6) と輻射部分の波動関数 (4.7) の Fourier 変換である。式 (4.6) と式 (4.7) の Fourier 変換は解析的に計算できて、 $\tilde{\psi}_{\text{sol}}(k, t) = e^{-\frac{1}{2}k^2 t} [3 + \cos(4t)]$ と $\tilde{\psi}_{\text{rad}}(k, t) = \tilde{f}(k) e^{-\frac{i}{2}k^2 t}$ が得られるので、式 (4.8) より

$$|\tilde{\psi}_{\text{sol}} + \tilde{\psi}_{\text{rad}}|^2 = [3 + \cos(4t)]^2 e^{-k^2 t} + \tilde{f}^2(k) + 2[3 + \cos(4t)] \tilde{f}(k) e^{-\frac{1}{2}k^2 t} \cos\left(\frac{1}{2}k^2 t\right) \quad (4.9)$$

となる。この式は、輻射を放出する $\psi_2(x, 0)$ を初期波束として時間発展させた場合にのみ、運動量空間での波形に鋸状の干渉パターンが発現することを示している。運動量 k が増大すると振幅の振動周期が短くなり、鋸状構造は運動量空間における波形の中心から左右に送り出されていくこともこの式からわかる。

実際には原点付近におけるソリトン部分の真の波動関数 $\Psi_{\text{sol}}(x, t)$ はもちろん式 (4.6) で近似的に導入した ψ_{sol} と異なり、

$$\Psi_{\text{sol}} = \psi_{\text{sol}} + f_e \quad (4.10)$$

となる。ただし、誤差 $f_e(x, t)$ もまた原点付近に局在した関数となるから、その Fourier 変換 \tilde{f}_e は運動量空間で広がった関数となり、鋸状パターンのような高周波構造の発生機構には影響を与えない。

4.3 数値計算による結果

図 4.1 は2つの初期波束 $|\psi_1(x, 0)|^2$ と $|\psi_2(x, 0)|^2$ である。両者の形はとてもよく似ており、実際どちらの初期波束からスタートしても実空間で振幅が周期的に振動

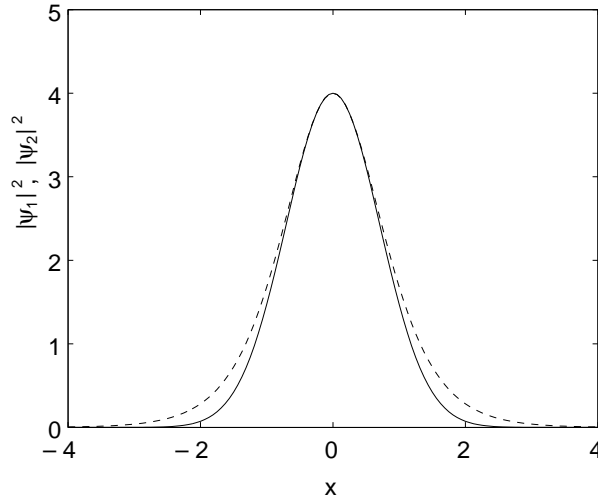


図 4.1: 2つの初期波束の波形。破線は $|\psi_1(x, 0)|^2$ 、実線は $|\psi_2(x, 0)|^2$ 。

する。しかし、すでに述べたように式 (4.5) で表される Gauss 型初期波束 $\psi_2(x, 0)$ から出発したときにのみ、左右に低振幅の輻射が放出される。図 4.2 と図 4.3 は時刻 $t = 14$ における $|\tilde{\psi}_1(k, t)|^2$ と $|\tilde{\psi}_2(k, t)|^2$ の波形である。第 1 の sech 関数型初期波束を時間発展させて得られた運動量空間での波形 $|\tilde{\psi}_1(k, t)|^2$ には単一のピークが見えるだけであるのに対して、第 2 の Gauss 型初期波束を時間発展させて得られた $|\tilde{\psi}_2(k, t)|^2$ には鋸状パターンが現れている。第 2 の Gauss 型初期波束の下では、第 3 章と同様に Symplectic-Fourier 法によって NLS 方程式 (4.1) を数値積分して $\tilde{\psi}_2(k, t)$ を計算した。

ここで、解析解および数値計算による結果を前節で導入した近似モデルによる結果と比較する。図 4.4 は、式 (4.8) で与えられた近似モデルによる運動量空間での波形 $|\tilde{\psi}_{\text{sol}} + \tilde{\psi}_{\text{rad}}|^2$ である。この波形の時刻は図 4.2 と図 4.3 と同様に $t = 14$ で、 $\tilde{f}(k)$ は $e^{-\frac{1}{2}k^2}$ とおいて計算した。図 4.3 と図 4.4 を比較すると、単純化された近似モデルはノルムの保存を考慮していないため、全体的に振幅が過剰になっているが、近似モデルによる計算が定性的に鋸状パターンの特徴をよく再現している。

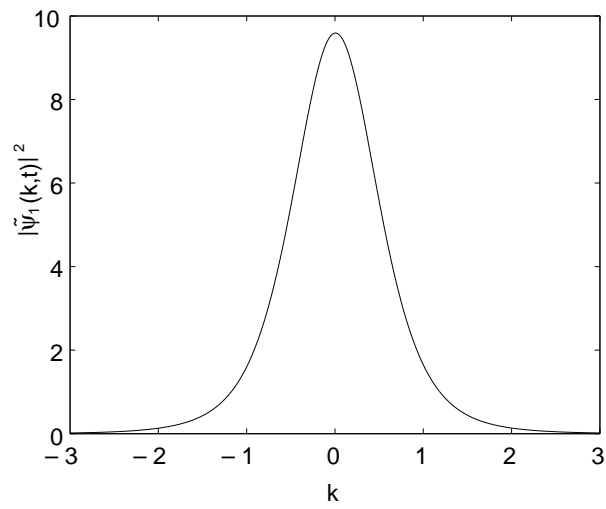


図 4.2: 初期波束 (4.3) から時間発展した波束の運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_1(k,t)|^2$ 。 $t = 14$ 。

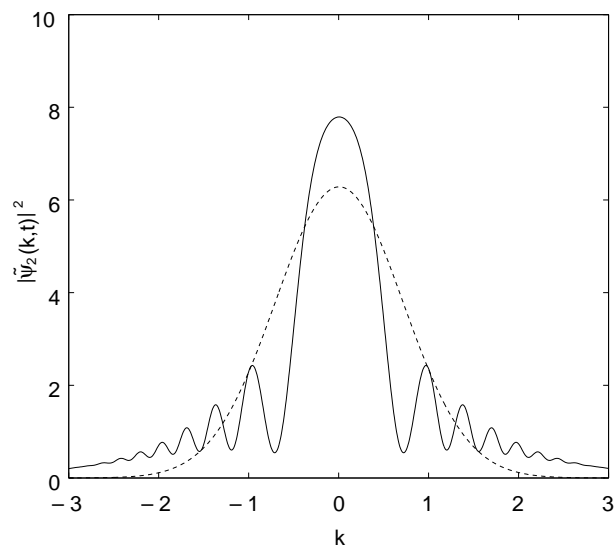


図 4.3: 初期波束 (4.5) から時間発展した波束の運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_1(k,t)|^2$ 。 $t = 14$ 。破線は初期波束 (4.5) を表す。

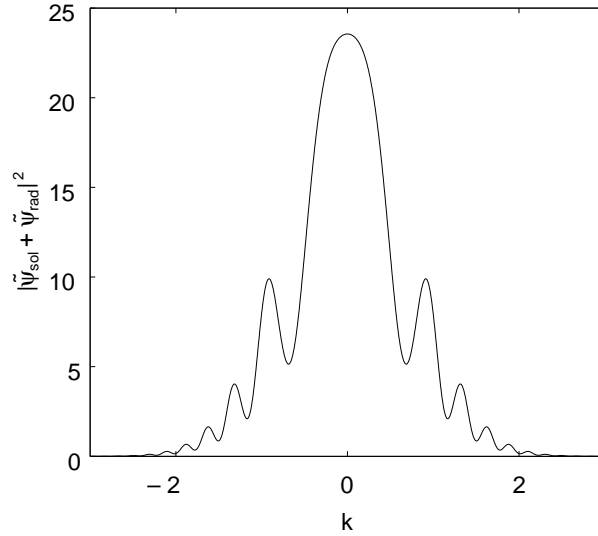


図 4.4: 近似モデルによる運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_{\text{sol}} + \tilde{\psi}_{\text{rad}}|^2$ 。時刻は $t = 14$ で、 $\tilde{f}(k)$ は $e^{-\frac{1}{2}k^2}$ にとった。

4.4 引力相互作用する BEC を用いた輻射検出実験の可能性

ソリトン理論において、厳密なソリトンではない初期波束が輻射を放出しながら崩壊することはよく知られているが [27–34]、輻射部分の振幅は $O(t^{-\frac{1}{2}})$ のように小さくなるため、実験的に輻射の存在を捉えることは難しい。そのため、BEC 以外の物理系を含めても、輻射を直接観察した例は少ない。一方、これまで述べてきたように、実空間で輻射を放出しながら周期的に中心振幅を振動させるような波束では、運動量空間における波形に特徴的な鋸状のパターンが生成されることがわかった。そこでこの現象を利用し、波動関数の波形を運動量空間で観察できるような物理系において鋸状パターンの生成が観測されれば、輻射の実験的検出ができたことになる。

原子間相互作用が引力型の BEC を 1 次元的なトラップ内に閉じ込めた系はそのようなことが可能な物理系の候補である。第 1 章で述べたように、BEC の際立つ魅力的な点として、巨視的波動関数の絶対値 2 乗が光学的手段によってリアルタイムに検出可能なことがあげられる [19]。さらに、BEC には実空間における粒子密度分布のみならず、運動量空間における巨視的波動関数の波形、すなわち系の運動量分布も観察可能であるという特長がある。系の運動量分布を可視化する方法として Time-of-Flight(TOF) 法がよく用いられる。これは BEC を捕捉していたト

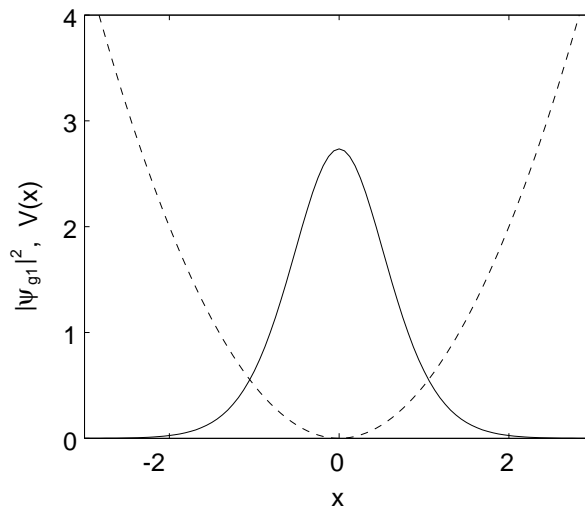


図 4.5: 外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x) = x^2/2$ 中で Gauss 型波束 $\psi_2(x, 0)$ (4.5) を緩和させて生成された基底状態波束 ψ_{g1} の波形。実線は $|\psi_{g1}|^2$ 、破線は外力ポテンシャル V_{ext} 。

ラップをある時刻において切り、一定の時間が経過した後に飛散した原子の雲を光学的に撮影する方法である。トラップが切られる直前に大きな運動量をもっていた原子は一定の飛行時間の中に長い距離を移動するが、小さな運動量しかもっていなかった原子の場合は元のトラップ極小点からの移動距離が短くなる。実際、世界で初めて原子気体による明確な BEC の生成が実現したときにも TOF 画像が構成された [6–8]。その結果、原子の運動量分布が 0 の付近に鋭いピークが形成されていることが確認され、BEC 生成の証拠となったのである。このように、BEC では運動量空間における巨視的波動関数の波形が実空間での原子密度に写像されるので、適切な条件を満たすように生成した BEC の TOF 画像を構成し、そこに鋸状パターンを観察することで輻射の存在を検知できる可能性がある。

そのためにはまず初期波束の準備が必要である。トラップに捕捉された BEC は引力相互作用の下で熱平衡状態に緩和し、Gauss 型波束とは異なった基底状態波動関数が得られる。図 4.5 に外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x) = x^2/2$ 中で式 (4.5) の Gauss 型波束 $\psi_2(x, 0)$ を緩和させて生成した基底状態波動関数 ψ_{g1} の波形を示す。図 4.5 中、実線が緩和法によって得られた基底状態波動関数の波形 $|\psi_{g1}|^2$ を表し、破線は外力ポテンシャルの形状を表す。

次に、基底状態波動関数 ψ_{g1} を初期波束として時刻 $t = 0$ に x 軸方向の外力ポテンシャルを切り、波束を自由発展させる。 ψ_{g1} の振幅が十分大きければ、輻射を放出しながら振幅が振動する振る舞いが実現される。図 4.6 に ψ_{g1} を $t = 14$ まで時

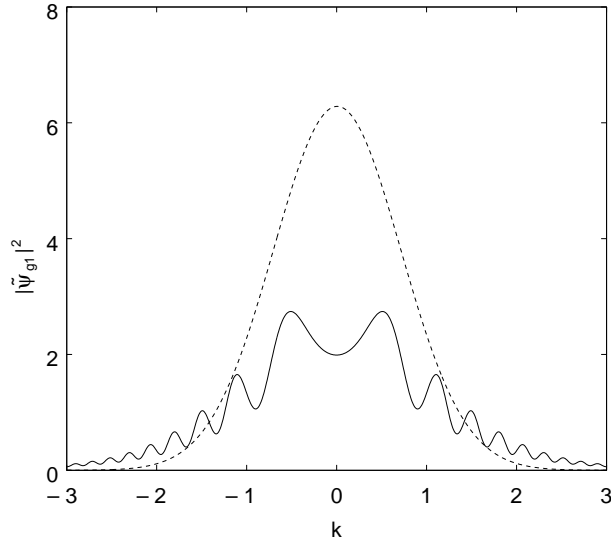


図 4.6: 基底状態波束 ψ_{g1} を $t = 14$ まで時間発展させたときの運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_{g1}|^2$ 。破線は $t = 0$ のときの波形。

間発展させたときの運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_{g1}|^2$ を示す。この時刻までに、運動量空間における波形に多数の鋸状パターンが生成されていることがわかる。

以後、無次元化された NLS 方程式に物理的なパラメタを対応させるため、NLS 方程式 (4.1) を次元をもつ量を用いて

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - g_{1D} |\psi|^2 \psi \quad (4.11)$$

のように書き換える。 \hbar は Planck 定数を 2π で除した Dirac 定数で、 m は BEC を構成する原子の質量、 g_{1D} は 1次元の結合定数である。相互作用が引力型の場合、通常の 3次元における結合定数 g_{3D} は原子の s 波散乱長 $a_s < 0$ を用いて $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 |a_s|/m$ と書けるが、s 波散乱長は本来 3次元の幾何に根ざした量であるため 1次元系でその値を利用するには次のように考える。

まず、 g_{3D} の次元は [エネルギー] \times [長さ]³ である。その理由は、NLS 方程式の中の結合定数 g_{3D} が $g_{3D} |\psi_{3D}|^2 \psi_{3D}$ のように 3次元粒子数密度 $|\psi_{3D}|^2$ とセットで現れるためである。1次元系の NLS 方程式の中での結合定数 g_{1D} は $g_{1D} |\psi|^2 \psi$ のように現れ、 $|\psi|^2$ は長さの逆数の次元をもつだけであるから、 g_{3D} と g_{1D} との間には長さの 2乗だけ次元の差があることになる。そこで典型的な系のスケールとして、BEC のラジアル方向の閉じ込めポテンシャルの直径 a_{\perp} を使い、以下 $g_{3D} = a_{\perp}^2 g_{1D}$ とする。

次元をもった NLS 方程式 (4.11) は、以下のように無次元化される。よく知られ

ている調和型外力ポテンシャルの大きさ $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ によって、閉じ込めポテンシャルの周波数 ω_{\perp} を定義し、無次元化された空間変数 \bar{x} を導入して $x = a_{\perp}\bar{x}$ とする。次に、 ω_{\perp} によって無次元化された時間変数 $\bar{t} = \omega_{\perp}t$ を定義する。最後に波動関数のスケールを規格化し、 $\psi = \sqrt{N/a_{\perp}}\bar{\psi}$ とおく。そうすると次元をもった NLS 方程式 (4.11) は

$$i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{t}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{x}^2} - \frac{g_{1D}}{\hbar\omega_{\perp}a_{\perp}}N|\bar{\psi}|^2\bar{\psi} \quad (4.12)$$

となる。無次元化された1次元の結合定数 \bar{g}_{1D} は

$$\bar{g}_{1D} = \frac{g_{1D}}{\hbar\omega_{\perp}a_{\perp}}N = \frac{4\pi|a_s|N}{a_{\perp}} \quad (4.13)$$

とかける。実際に BEC を x 軸方向に長い1次元的なトラップに閉じ込めた実験では、 $a_{\perp} \approx 1.5 \mu\text{m}$ が用いられ、原子の s 波散乱長は $a_s \approx -0.16 \text{ nm}$ に調整された [35]。このときパルスの粒子数 N の上限は、

$$N < 0.67\frac{a_{\perp}}{|a_s|} \quad (4.14)$$

で決まり、これを満たさなければ系の不安定化を招き、BEC が自己崩壊してしまう [68]。偏微分方程式論では、引力型 NLS 方程式の場合、任意の急減少初期波束に対して有限の解が一意的に存在することが知られているが [69]、粒子数 N が多すぎると希薄原子気体の仮定が破れ、2体散乱のみしか取り入っていない NLS 方程式による物理の記述が不適當になる。 $a_{\perp} \approx 1.5 \mu\text{m}$ と $a_s \approx -0.16 \text{ nm}$ から計算される N の上限値は 6300 個程度であり、実際の実験で報告された値は最大 5000 個、典型的には $\sim 10^3$ 個程度である [35, 70]。

式 (4.13) と式 (4.14) から $\bar{g}_{1D} < 8.42$ がわかるが、典型的な実験値として $N = 2500$ とおいて \bar{g}_{1D} を計算してみると、 $\bar{g}_{1D} = 3.35$ となる。これは $O(1)$ の値ではあるが、これまでの数値実験で使用してきた値 1 より大きい。そこで、 \bar{g}_{1D} の値が 1 からずれることによって鋸状パターンがどう変わるかをシミュレーションする。

図 4.7 は $\bar{g}_{1D} = 5$ として外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x) = x^2/2$ の中で Gauss 型波束 $\psi_2(x, 0)$ を緩和させて生成された基底状態波動関数 ψ_5 の波形 $|\psi_5|^2$ である。これを時間発展させてできる運動量空間波形は図 4.8 のようになる。このケースでは $\bar{g}_{1D} = 1$ のときよりも引力自己相互作用が強く、実空間での初期波束が原点に局在し波束の傾きが急峻になった。そのため、系の運動エネルギーが増大し、トラップ解放時の原子の飛行距離が長くなる。結果として運動量空間波形の振幅は小さ

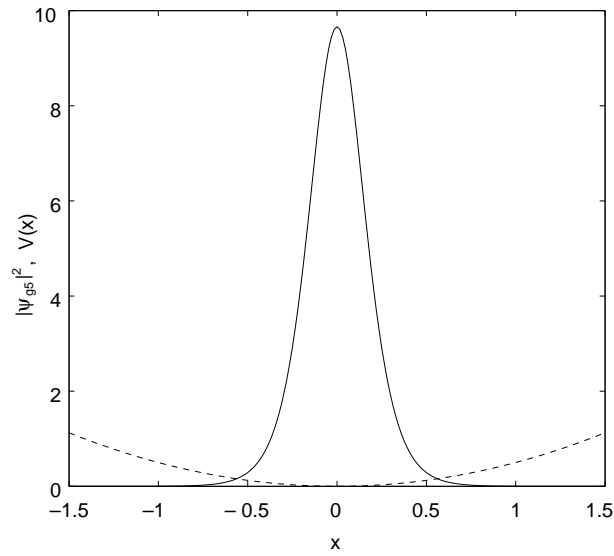


図 4.7: $\bar{g}_{1D} = 5$ として外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x) = x^2/2$ の中で Gauss 型波束 $\psi_2(x, 0)$ を緩和させて生成された基底状態波動関数 ψ_5 の波形 $|\psi_5|^2$ (実線)。破線は外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x)$ 。

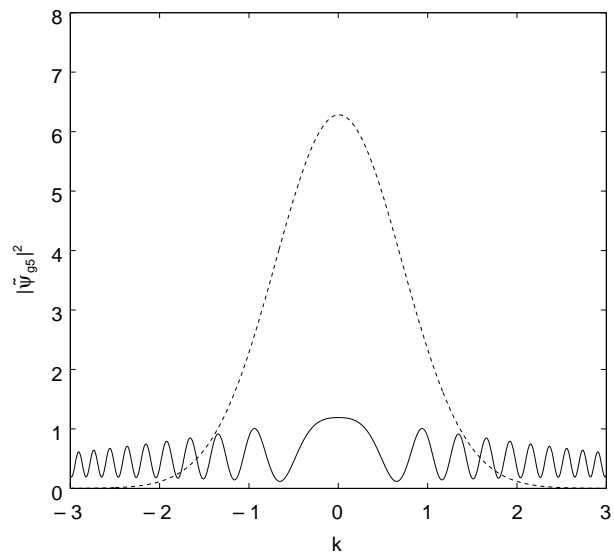


図 4.8: 基底状態波束 ψ_5 を $t = 14$ まで時間発展させたときの運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_5|^2$ 。破線は $t = 0$ のときの波形。

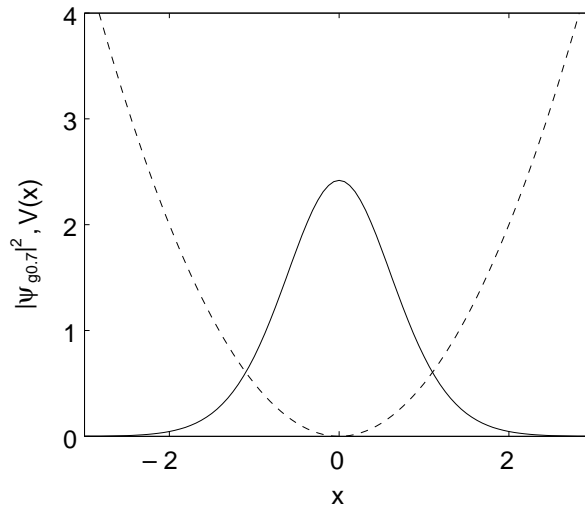


図 4.9: $\bar{g}_{1D} = 0.7$ として外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x) = x^2/2$ の中で Gauss 型波束 $\psi_2(x, 0)$ を緩和させて生成された基底状態波動関数 $\psi_{0.7}$ の波形 $|\psi_{0.7}|^2$ (実線)。破線は外力ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x)$ 。

くなった。次に \bar{g}_{1D} が 1 よりも小さいときを考える。図 4.9 は $\bar{g}_{1D} = 0.7$ として同様に緩和・生成された基底状態波動関数 $\psi_{0.7}$ の波形 $|\psi_{0.7}|^2$ である。これを時間発展させてできる運動量空間波形は図 4.10 のようになる。結合定数 \bar{g}_{1D} が 1 に満たない場合、振幅の振動が弱くなるため干渉縞のコントラストは低くなっている。

粒子密度や鋸状パターンのコントラストが小さすぎると、光学的に濃淡を検知できなくなることが予想されるため、 \bar{g}_{1D} を適切な値に調整する必要がある。またソリトン部分に十分な振動をさせるには粒子数 N が十分大きい必要がある。式 (4.13) と式 (4.14) は Feshbach 共鳴で自由に制御できるパラメタである a_s を小さくとれば、BEC の崩壊を避けつつ N を増やし、同時に \bar{g}_{1D} が大きくなりすぎないようにできることを示唆している。このように、注意深く実験パラメタを制御することにより非ソリトン波束から放出される輻射を実験的に観測できる可能性がある。

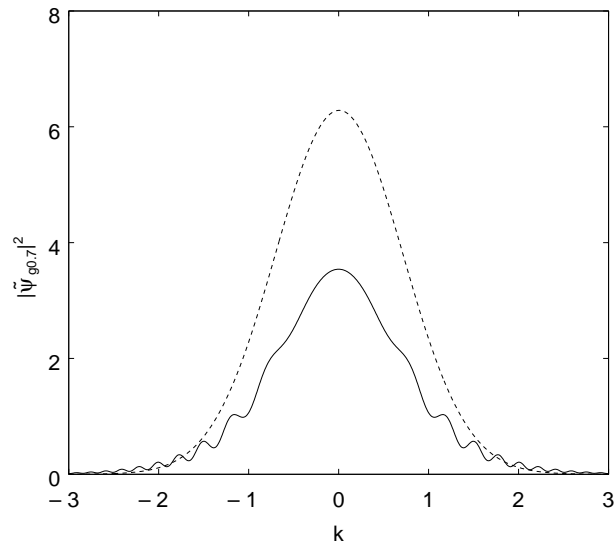


図 4.10: 基底状態波束 $\psi_{0.7}$ を $t = 14$ まで時間発展させたときの運動量空間波形 $|\tilde{\psi}_{0.7}|^2$ 。破線は $t = 0$ のときの波形。

第5章 矩形関数の和で近似された初期波束の相互作用後に残留するソリトン数の解析

5.1 空間離散化による ZS 問題の近似解法：I

NLS 方程式の初期値問題において、初期波束が複数の非ソリトン型パルスからなり、パルス間の散乱が起こる状況を考える。特に、初期条件の N -ソリトン解からのずれが $t \rightarrow \infty$ の終状態において生成されるソリトン数に及ぼす影響を、NLS 方程式の直接的な数値積分を用いずに解析・評価する。まず、その方法の1つである、Boffetta と Osborne による準解析的な近似方法 [60] を説明する。第2章で述べたように、 $t \rightarrow \infty$ で振幅が残るソリトン部分の形状は離散固有値 $\{\xi_i | i = 1, 2, \dots, M\}$ によって決まることが、GLM 方程式 (2.31) からわかる。これらの離散固有値はすべて散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点であることから、系の終状態に関する情報を引き出すためには散乱振幅 $a(\xi)$ を調べる必要がある。このことは境界条件 (2.12a) のもとで $x \rightarrow +\infty$ における $\phi(x; \xi)$ を計算することと等価である。NLS 方程式の ZS 問題

$$\Psi_x = S\Psi, \quad S = \begin{pmatrix} -i\xi & i\psi^* \\ i\psi & i\xi \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

において、 ψ は未知関数 $\psi(x, t)$ の与えられた初期値 $\psi(x, 0)$ とする。

ZS 問題を解析する際の主な困難は、 $\psi(x, 0)$ が定数ではなく、空間座標 x に依存することにある。そこで、 $\psi(x, 0)$ を多数の小区間

$$I_j : x_j \leq x < x_{j+1} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (5.2)$$

に分割し、各小区間においては $\psi(x, 0)$ を定数とみなした近似的な初期波束を考える。第2章で仮定したように $\psi(x, 0)$ は Schwartz クラスに属する急減少関数である。そのため、 $|x|$ が十分大きい領域では $|\psi(x, 0)|$ は非常に小さくなり、数値計算

を行う際のマシンイプシロンより小さくなる。したがってそのような微小な部分
を無視し、 $\psi(x, 0)$ がコンパクトな台 $[x_1, x_{N+1}]$ をもつものと近似する。

ここで矩形関数の列 ψ_j を

$$\psi_j(x) = \begin{cases} V_j & x \in I_j, \\ 0 & x \notin I_j \end{cases} \quad (5.3)$$

のように定義すれば、近似された初期波束は

$$\psi(x, 0) = \sum_{j=1}^N \psi_j(x) \quad (5.4)$$

$$= \begin{cases} V_j & (x \in I_j, j = 1, 2, \dots, N), \\ 0 & (x < x_1, x_{N+1} \leq x) \end{cases} \quad (5.5)$$

となる。その結果、各小区間での ZS 問題 (5.1) は

$$\Psi_x = S_j \Psi, \quad S_j = \begin{pmatrix} -i\xi & iV_j^* \\ iV_j & i\xi \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となる。この方程式の解は厳密に求めることができ、第 j 小区間の幅を

$$x_{j+1} - x_j = L_j \quad (5.7)$$

を書くと、第 j 小区間における解は、

$$\Psi(x_{j+1}) = T_j \Psi(x_j), \quad T_j = \exp(L_j S_j), \quad (5.8a)$$

$$T_j = \begin{pmatrix} \cos K_j L_j - i(\xi/K_j) \sin K_j L_j & i(V_j^*/K_j) \sin K_j L_j \\ i(V_j/K_j) \sin K_j L_j & \cos K_j L_j + i(\xi/K_j) \sin K_j L_j \end{pmatrix}, \quad (5.8b)$$

$$K_j = \sqrt{\xi^2 + |V_j|^2} \quad (5.8c)$$

となる。ここで、スペクトルパラメタ ξ は複素上半面に解析接続される複素数であるから、 K_j は負の分枝も取り得る。しかし、 T_j において複素関数としての \cos は K_j の符号によらない。また同じく複素関数としての \sin は T_j 中で分母に K_j を伴って現れる。したがって、 K_j の分枝の選び方によらず、 T_j は一通りに定まり、これから説明するように ZS 問題の解析には T_j のみが使われるので、以後 K_j の符号の取り方は正に固定する。

ここで、近似された $\psi(x, 0)$ の台 $[x_1, x_{N+1}]$ にわたる転送行列 T を

$$T = T_N T_{N-1} \cdots T_2 T_1 \quad (5.9)$$

と定義する。すると、Jost 関数は関係式

$$\Psi(x_{N+1}) = T\Psi(x_1) \quad (5.10)$$

を満たしている。Jost 関数の漸近形 (2.12a) から、

$$\begin{aligned} \phi(x_{N+1}; \xi) &= T\phi(x_1; \xi) = e^{-i\xi x_1} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(\xi)e^{-i\xi x_{N+1}} \\ b(\xi)e^{i\xi x_{N+1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

が得られる。このようにして、近似的な散乱振幅が転送行列 T の成分を用いて

$$a(\xi) = e^{iL\xi} T_{11}, \quad (5.12a)$$

$$b(\xi) = e^{-i(x_1+x_{N+1})\xi} T_{21} \quad (5.12b)$$

のように書ける。ここでパラメタ L は

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N \quad (5.13)$$

と定義され、近似的に切り出された初期波束の台の幅である。このように、任意の Schwartz 級初期波束を矩形関数の和として近似することにより、散乱振幅 $a(\xi)$ と $b(\xi)$ の近似的表式が得られる。各小区間 L_j の幅を要求精度に合わせて設定すれば、終状態において生成されるソリトンの情報を、近似的に計算された $a(\xi)$ から抽出することができる。

5.2 箱型初期波束への適用

前節で説明した方法を、実数値をとる箱型の初期波束に適用する。箱型の初期波束に対しては、前節の近似解法が ZS 問題に対する厳密解法に一致し、正確な散乱振幅が求められる。散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点は ξ の複素上半面にあるから、離散固有値は条件

$$\xi = i\eta \quad (\eta > 0) \quad (5.14)$$

を満たす。以後、系の規格化のため変数 A と u を

$$A = V_0 L, \quad u = \eta L \quad (5.15)$$

のように導入して、初期波束の台の幅 L を消去する。

5.2.1 単一の箱型初期波束の場合

箱型初期波束の幅を 1 として、

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases} \quad (5.16)$$

を考える。ただし、ポテンシャルの大きさ A は実数とする。このような初期波束に対する ZS 問題には厳密解を用いた解析がすでになされているが [71, 72]、ここでは上で説明した方法を用いて散乱振幅を導出するための例題として単一の箱型初期波束を取り扱う。転送行列 (5.8b) と散乱振幅 (5.12a) の式、および離散固有値が複素上半面の虚軸上にあるという条件 (5.14) から、

$$a(u) = e^{-u} \left[\cos \bar{K} + \frac{u}{\bar{K}} \sin \bar{K} \right], \quad (5.17)$$

$$\bar{K} \equiv \sqrt{A^2 - u^2}$$

となる。したがって、散乱振幅 $a(u)$ のゼロ点に関する決定方程式

$$\sqrt{A^2 - u^2} = -u \tan \sqrt{A^2 - u^2}, \quad (5.18a)$$

$$0 < u < A \quad (5.18b)$$

の解の個数を調べることで、初期波束 (5.16) に対応する終状態に生成されるソリトンの数がわかる。解の個数が A の値によってどのように変化するかは以下のように求められる。まず、式 (5.18a) の左辺において、曲線 $y = \sqrt{A^2 - u^2}$ は $u - y$ 平面上の第 1 象限における半径 A の円を表しており、正の値しかとらない。次に式 (5.18a) の右辺において、 u が 0 から A まで増加するにつれて $\sqrt{A^2 - u^2}$ は A から 0 まで単調に減少するということと、 \tan 関数の周期性とを合わせ、次の 3 つのケースが考えられる。ただし、 n は自然数である。

- $0 < A < \pi/2$ の場合

$\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $u \rightarrow 0$ で $\tan A > 0$ に近づく。この点から u の増加とともに、 $\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $u \rightarrow A$ で 0 に近づくまで単調減少する。したがって $-u \tan \sqrt{A^2 - u^2} < 0$ であるから決定方程式 (5.18) に解はない。つまり、ソリトンは生成されず、初期波束はすべて低振幅で拡散する輻射に転化する。

- $\pi(2n - 1)/2 < A < \pi n$ の場合

$\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $u \rightarrow 0$ で $\tan A < 0$ に近づく。この点から u を増加させて $\sqrt{A^2 - u^2} \rightarrow \pi/2$ とすると、 $\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $-\infty$ に向かって単調減少する。この区間において $-u \tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は区間 $(0, \infty)$ を単調増加するので、半径 A の円との 1 つ目の交点が見れる。その後 u が A まで増加する間に、 $\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $n - 1$ 回だけ 0 から $-\infty$ までを単調に動き、これらの区間で $-u \tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は区間 $[0, \infty)$ を単調増加する。すなわち、円との交点は計 n 個である。

- $\pi n < A < \pi(2n + 1)/2$ の場合

$\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $u \rightarrow 0$ で $\tan A > 0$ に近づく。この点から u を増加させて $\sqrt{A^2 - u^2} \rightarrow \pi$ とすると、 $\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $-\infty$ に向かって単調減少する。この区間のうち、 $\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ が 0 から $-\infty$ まで単調減少している間、 $-u \tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は区間 $(0, \infty)$ を単調増加するので、半径 A の円との 1 つ目の交点が見れる。その後 u が A まで増加する間に、 $\tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は $n - 1$ 回だけ 0 から $-\infty$ までを単調に動き、これらの区間で $-u \tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は区間 $[0, \infty)$ を単調増加する。すなわち、円との交点は計 n 個である。

以上より、単一の箱型初期波束初期波束 (5.16) の大きさ A が

$$(n - \frac{1}{2})\pi < A < (n + \frac{1}{2})\pi \quad (5.19)$$

を満たすとき、終状態に生成されるソリトンの数は n となる。このように A の大きさによってソリトン生成の有無が決定される様子を示すグラフの例を図 5.1 に示す。図 5.1 において (a) のケースは $A = 1.2 < \pi/2$ で決定方程式 (5.18) の解が存在しない場合を、(b) のケースは $\pi/2 < A < 3\pi/2$ で、ただ 1 つの解が存在する場合を示している。

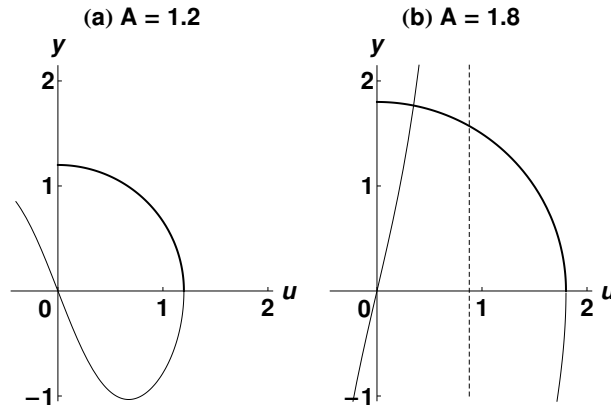


図 5.1: 散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点を決定する方程式 (5.18) の解。(a) $A = 1.2$ の場合と (b) $A = 1.8$ の場合。太線は領域 $u > 0$ における曲線 $y = \sqrt{A^2 - u^2}$ のグラフで、細線が曲線 $y = -u \tan \sqrt{A^2 - u^2}$ のグラフ。ケース (b) の破線が $\sqrt{A^2 - u^2} = \pi/2$ となる u の値を示している。この点において曲線 $y = -u \tan \sqrt{A^2 - u^2}$ は発散している。

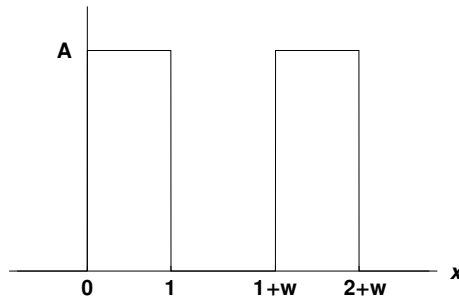


図 5.2: 式 (5.20) で表される 2 連箱型初期波束。

5.2.2 2 連箱形初期波束の場合

次に、図 5.2 で示されるような、大きさが A で幅が 1 の箱型矩形関数を距離 w を隔てて 2 つ並べた 2 連箱形初期波束

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A & (0 < x < 1, 1 + w < x < 2 + w), \\ 0 & (x < 0, 1 < x < 1 + w, 2 + w < x) \end{cases} \quad (5.20)$$

を考える。この場合の散乱振幅 $a(u)$ は式 (5.14) と式 (5.15) を考慮して

$$a(u) = e^{-2u} \left[\left(\cos \bar{K} + \frac{u}{\bar{K}} \sin \bar{K} \right)^2 - \frac{A^2}{\bar{K}^2} e^{-2uw} \sin^2 \bar{K} \right], \quad (5.21a)$$

$$\bar{K} \equiv \sqrt{A^2 - u^2} \quad (5.21b)$$

のように与えられる。ここでも $u > A$ の場合には解が存在しないので、パラメタ u の変域は

$$0 < u < A \quad (5.22)$$

に限られる。ここで、2つの初期パルス同士の距離を決めるパラメタ w が果たす役割を考察する。まず、 w が小さい場合を考える。このときの初期波束は、2つの箱型パルスが合体した幅2の単一パルスに近い振る舞いをする。実際に式(5.21a)において $w \rightarrow 0$ とすると $e^{-2uw} \rightarrow 1$ となり、散乱振幅 $a(u)$ のゼロ点に関する決定方程式は、

$$\sqrt{A^2 - u^2} = -u \tan(2\sqrt{A^2 - u^2}) \quad (5.23)$$

となる。これは確かに幅1の単一箱型初期波束に対して求めた式(5.18a)において幅を2としたものに一致している。

反対に初期パルス間の距離 w が大きくなると、式(5.21a)において指数関数 e^{-2uw} の寄与は小さくなる。ただし、初期波束の台がコンパクトであるとの仮定のため、 $w \rightarrow \infty$ とはせず、有限だが十分大きい w を考える。このとき、式(5.21a)の小括弧内は単一の箱型初期波束に対して求めた式(5.17)の括弧内の式の2乗と一致する。つまり決定方程式の解が存在すれば、単一箱型初期波束の場合とほとんど同一でありながら微小な指数関数の寄与分だけわずかに異なる2つの解が近接して得られる。このことは、低振幅の拡散輻射のみによる初期パルス間相互作用の影響が小さく、それぞれの初期パルスがほぼ独立にソリトンになることを意味している。

このように、 w は2連パルス間の相互作用の程度を決定しており、2つの初期パルス同士の距離が非常に小さい場合と大きい場合では、自然に期待される結果が得られる。しかし、これら2つ場合の中間の w の値を適切に選ぶと、式(5.21a)で2連パルス間の相互作用を表す指数関数部分が、系の終状態に非自明な寄与をもたらす。図5.3は $A-u$ 平面上で式(5.22)を満たす曲線で、2連パルス間の距離 w を $w = 0.1$ とした場合が図5.3(a)、 $w = 1.5$ とした場合が図5.3(b)である。図5.3(a)で各実線が A 軸に向かう各座標は、式(5.21b)において $u \rightarrow 0$ とすることで求められ、自然数 n を用いて $A = \pi(2n-1)/4$ となる。よって、 $A < \pi/4$ においては散乱振幅のゼロ点が存在しないことがわかる。この場合、2つの初期パルスの大きさが小さいため、すべてのノルムが輻射に転化することを意味する。 A が大きくなると、 $\pi/4 < A < 3\pi/4$ の範囲において式(5.22)の解がただ1つ出現し、系の終状態で1つのソリトンが形成される。このソリトンは系の空間対称性から2つの初

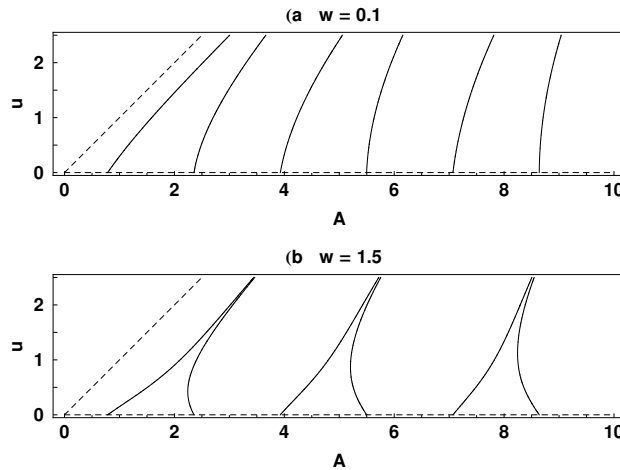


図 5.3: 2 連箱型初期波束の大きさ A の変化に伴う散乱振幅 $a(u)$ のゼロ点分布。(a) パルス間隔 $w = 0.1$ の場合。(b) パルス間隔 $w = 1.5$ の場合。破線は解が許容される領域 (5.22) の境界を示す。

期パルスの中央に生成される。さらに A が大きくなっていった場合も、生成されるソリトンの数は A の増加に対して単調に 1 つずつ増加していくことがわかる。

図 5.3(b) では (a) のケースと定性的に異なる振舞いが見られる。2 連パルス間の距離 w を $w = 1.5$ に広げた場合、グラフ中 u が A の 1 価関数とはならない領域が出現する。一度 $\pi/4 < A \lesssim 2.2$ の範囲で 1 つの解が現れたのち、 $A \sim 2.24228$ では解が 2 つに増えている。これらの解のうち u が小さい方の解は、図 5.4 に示すように 2 重解となっており、散乱振幅 $a(u)$ は 2 位の極をもつ。この特別な A の値を A_0 とすると、 $A = A_0$ の場合は終状態に 2 つのソリトンが現れることになる。このうち、散乱振幅 $a(\xi)$ の 2 位の極に起因するソリトンは、第 2 章で GLM 方程式 (2.31) を導入したときの仮定である離散固有値の単極性を破る特殊なソリトンで、多重極ソリトンと呼ばれるものになる [73]。さらに A の値が大きくなっていくと最終的に残るソリトンの数が 3 つに増えることがわかる。ところが、 $3\pi/4 < A < 5\pi/4$ の範囲では生成されるソリトン数は 2 となり、再び減少に転じる。このように、2 連初期パルス間の距離 w の値によっては、終状態に生成されるソリトンの数が A の単調増加関数にならなくなる時がある。

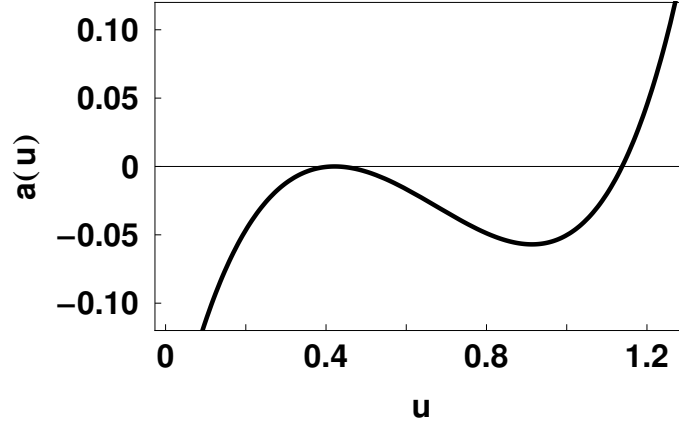


図 5.4: 2 連箱型初期波束の大きさが $A = A_0 (\sim 2.24228)$ のときの散乱振幅 $a(u)$ 。 $a(u) = 0$ のゼロ点のうち小さい方が 2 重解となっている。

5.2.3 非対称な大きさをもつ 2 連箱形初期波束の場合

今度は、非対称な大きさをもつ 2 連箱形初期波束

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A, & (0 < x < 1), \\ sA, & (1 + w < x < 2 + w), \\ 0, & (x < 0, 1 < x < 1 + w, 2 + w < x) \end{cases} \quad (5.24)$$

を設定する。記述の簡略化のため関数

$$f(A, u) = \cos K(A) + \frac{u}{K(A)} \sin K(A), \quad (5.25a)$$

$$g(A, u) = \frac{A}{K(A)} \sin K(A), \quad (5.25b)$$

$$K(A) = \sqrt{A^2 - u^2} \quad (5.25c)$$

を導入する。空間的に非対称な初期条件 (5.24) に対する散乱振幅 $a(i\eta)$ を計算すると、

$$a(u) = e^{-2u} [f(A, u)f(sA, u) - e^{-2uw}g(A, u)g(sA, u)] \quad (5.26)$$

となる。期待される通り散乱振幅 $a(u)$ は A と sA に関して対称な関数となり、指数関数 e^{-2uw} を含む項が箱型波束が崩壊してできる輻射による相互作用の寄与を記述している。今回は、これまでと違って $sA < u$ が満たされるときに $f(sA, u)$ と $g(sA, u)$ が双曲線関数になるケースも除外されないことに注意する。

図 5.5 は 2 つのパルス間距離 w を $w = 1.5$ としたときの、 $A-u$ 平面における曲線 $a(u) = 0$ の振る舞いを描いたものである。ただし、 $s = 1/\sqrt{2}$ とした。非対称 2

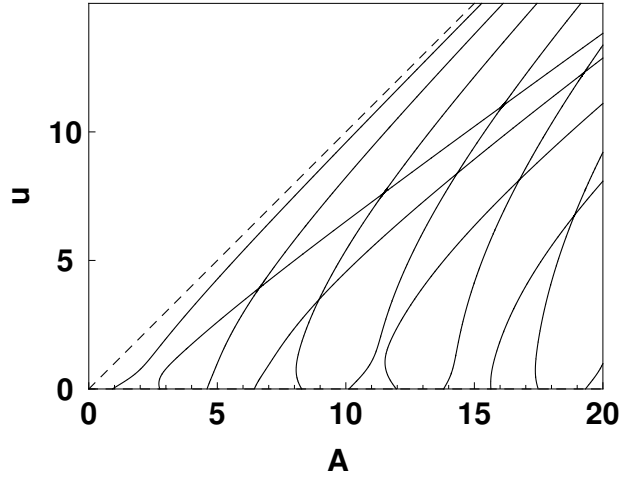


図 5.5: 非対称 2 連初期波束の大きさを決定するパラメタ A の変化に伴う散乱振幅 $a(u)$ のゼロ点分布。パルス間隔は $w = 1.5$ で 2 つの初期パルスの大きさの非対称性を決めるパラメタ s は $s = 1/\sqrt{2}$ とした。破線は解が許容される領域 (5.22) の境界を示す。

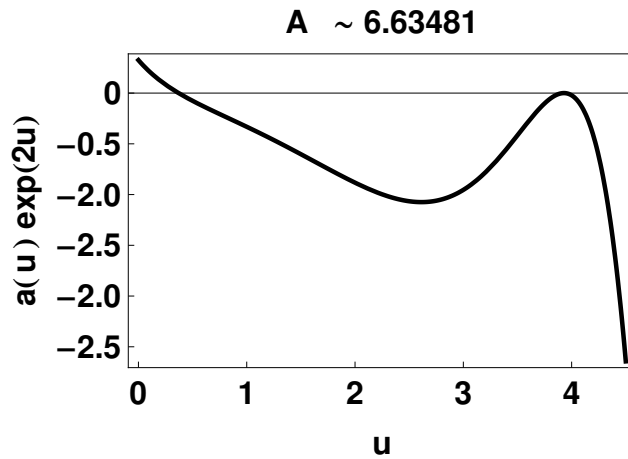


図 5.6: 非対称 2 連初期波束の大きさを決定するパラメタが $A \sim 6.63481$ の場合の $a(u) \exp(2u)$ 。大きい方のゼロ点は 2 重解となっている。

連初期波束の大きさを決定するパラメタ A が大きくなると、 u は A の多価関数となる。そればかりか空間的に対称な分布をもつ初期波束の場合と異なって、解曲線の異なる分枝同士が交わる現象が見られるようになる。分枝同士の交わりが起こる最小の A は $A \sim 6.63481$ であり、図 5.6 で示すようにこの点における散乱振幅 $a(u)$ のゼロ点は 1 位の極ではなく、2 位の 2 重極である。このように、空間的に非対称な初期条件を設定した場合には分枝同士の交差が発生し、 $a(u) = 0$ のトラジェクトリは空間的に対称な初期波束を考えたときよりも複雑になる。そして、2 つの初期パルス間の距離 w の選び方によっては、崩壊する 2 つの初期パルス同士の相互作用の影響が現れ、終状態に生成されるソリトンの個数はやはり A の単調増加関数にならなくなる。

5.3 数値シミュレーションとの比較

この節では、前節で取り上げた対称な 2 連箱型初期波束に関する解析結果と、NLS 方程式 (2.5) を Symplectic-Fourier 法で数値積分した結果を比較する。ただし、数値計算においては初期波束の水平シフトを行って 2 つの初期パルス間の谷の中央が原点 $x = 0$ に一致するようにした。2 つの初期パルス間の距離 w は 1.5 に設定した。図 5.3(b) が示すように、 $w = 1.5$ は 2 連パルス間の相互作用の影響によって系の終状態に生成されるソリトンの数が A の単調増加関数にならなくなる場合に対応する。

はじめに $A = 1.5$ のケースを調べる。図 5.3(b) によると、この場合にはただ 1 つの解があり、数値シミュレーションでも十分大きい時刻 t において単一のソリトンが生成されることが期待される。図 5.7 が数値積分の結果であり、時刻 $t = 15$ における波動関数の絶対値 2 乗 $|\psi(x, t)|^2$ を描画している。3 つのパルスが認められ、中央のパルスはソリトンであるが、小さい左右の 2 つのパルスはソリトンにはなり得ない成分である。パルスが実際に 1-ソリトンであれば、式 (3.9) で与えられる sech 関数 ($g = -2$) によって波形をフィットできる。図 5.8 に図 5.7 の左側のパルスに対するフィッティング結果を示す。実線で描かれた数値積分の結果と、破線で描かれた sech 関数 ($\eta = 0.1389$) は大きく異なる波形となっている。数値積分によって得られた波形のノルムは sech 関数によるフィットより小さく、両側の小さいパルスは波形を維持できずに拡散していくことを意味している。したがって、理論の予言通り原点付近の大きなパルスだけが $t \rightarrow \infty$ でソリトンとして残留する。

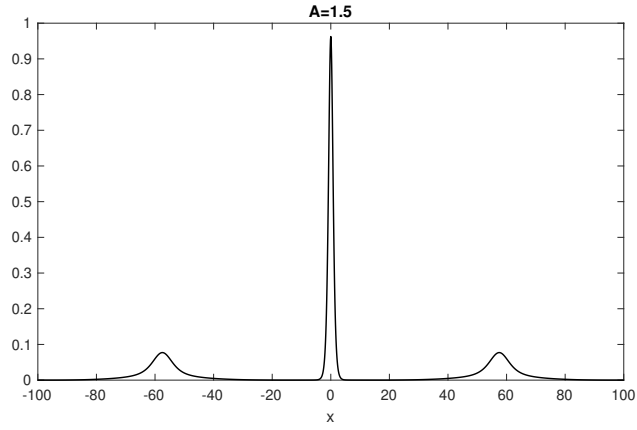


図 5.7: 大きさ $A = 1.5$ をもつ対称な 2 連箱型初期波束に対する数値計算結果。時刻 $t = 15$ での波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

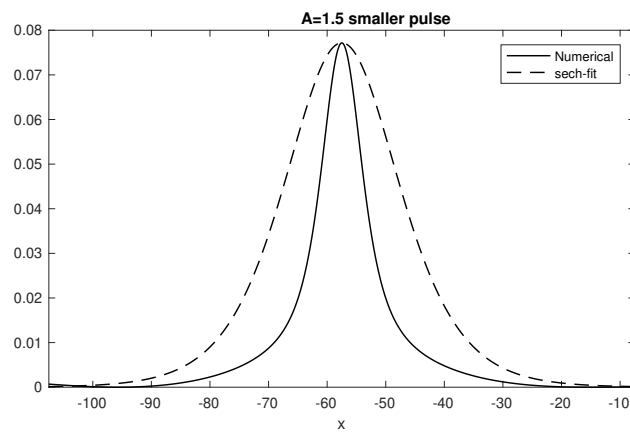


図 5.8: 図 5.7 の左側にあるパルスの波形 (実線) に対し式 (3.9) で与えられる sech 関数 ($g = -2, \eta = 0.1389$) の波形 (破線) を重ねたもの。

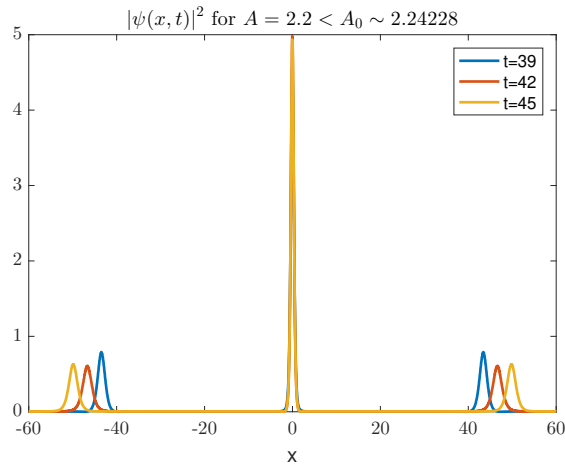


図 5.9: 大きさ $A = 2.2$ をもつ対称な 2 連箱型初期波束に対する数値計算結果。時刻 $t = 39, 42, 45$ での波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

次に、初期パルスの大きさを $A = 2.2$ にする。 $A = 2.2$ は 2 重極ソリトンを含めて計 2 つのソリトンが発生すると前節で予言された値 $A_0 \sim 2.24228$ よりもわずかに小さい。図 5.9 は時刻 $t = 39, 42, 45$ における波形 $|\psi(x, t)|^2$ を示しており、どの時刻においても 3 つのピークが見られる。今回、左右の小さいパルスの拡散速度は $A = 1.5$ のときよりも小さくなっているが、これらの小パルスの振幅は $A = 1.5$ のときよりも大きい。図 5.10 に図 5.9 の左側のパルス ($t = 45$) に対するフィッティング結果を示す。実線で描かれた数値計算結果は、破線で描かれた sech 関数 ($\eta = 0.3967$) よりもわずかに小さいが、その乖離の程度は $A = 1.5$ のときよりも小さい。これは左右のパルスにおいて、自らの幅に対する振幅が大きくなってきたため、 $A = 1.5$ のときよりも拡散が緩やかになってきていることを意味している。これら両側のパルスは数学的には $t \rightarrow \infty$ の極限で消失するはずの輻射に過ぎないが、崩壊速度が遅いため、BEC の実験の典型的なタイムスケール ($\sim 100\text{ms}$) では観測にかかる可能性がある。第 4 章で述べたように、時間変数 t の無次元化は原子集団を捕捉するトラップの周波数 ω によってなされ、典型的な値は数 100Hz である [35]。仮に $\omega = 500$ とすると $t = 45$ は 90ms に相当する。

図 5.11 は初期パルスの大きさ A を臨界値 A_0 の近似値である 2.24228 にセットしたときの波形 ($t = 39, 42, 45$) である。このとき、両サイドのパルスが左右へ拡散する速度は $A = 2.2$ のときと比べて急激に緩慢になっている。このように、左右のパルスの拡散がスローダウンする現象が 2 重極ソリトンの発生に対応している。

図 5.12 は初期パルスの大きさ A を臨界値 $A_0 \sim 2.24228$ より大きい 2.225 にセッ

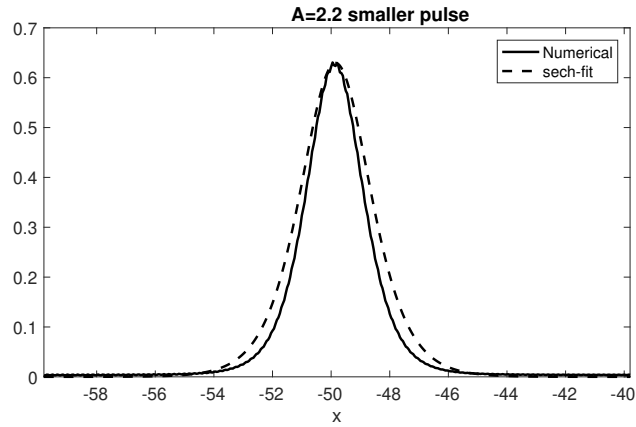


図 5.10: 図 5.9 の左側にあるパルスの波形 (実線) に対し式 (3.9) で与えられる sech 関数 ($g = -2, \eta = 0.396$) の波形 (破線) を重ねたもの。

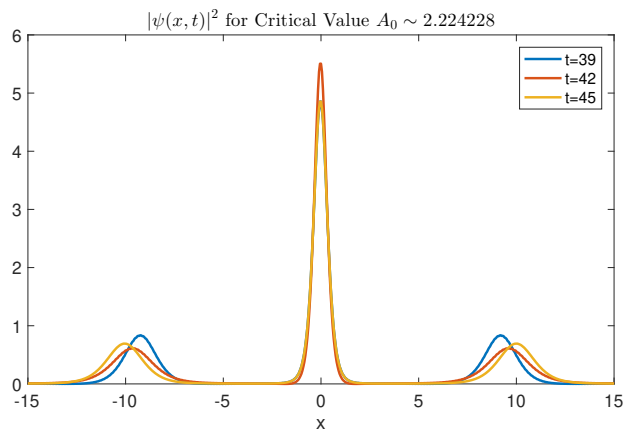


図 5.11: 大きさ $A = 2.24228 \sim A_0$ をもつ対称な 2 連箱型初期波束に対する数値計算結果。時刻 $t = 39, 42, 45$ での波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

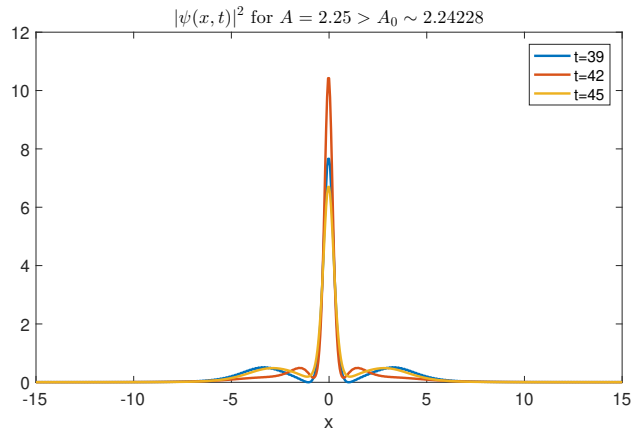


図 5.12: 大きさ $A = 2.225$ をもつ対称な 2 連箱型初期波束に対する数値計算結果。時刻 $t = 39, 42, 45$ での波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

としたときの波形 ($t = 39, 42, 45$) である。この値は $3\pi/4$ よりも小さいので、最終的に 3 つのソリトンの生成が期待される領域にある。ただし、これら左右の 2 つのパルスがそれぞれ 1-ソリトン解 (3.9) に対応しているのではないことに注意が必要である。もしこれらがそれぞれ左右反対方向に動き、同じ振幅をもつ独立な 1-ソリトン解であるならば、正負が逆の実数部分と同一の虚数部分をもつ離散固有値が存在してはならないが、初期波束の対称性から離散固有値は正の虚軸上にしか存在し得ない。実は、このように離散固有値の実部が 0 で虚数部分 η だけが異なる場合、2 つのソリトンは互いに束縛状態を形成し、空間的に分離不能な振動解となることが知られている [52, 61]。そして、2 つの異なる散乱固有値の虚部を η_1 および η_2 とすると、振動の角振動数は $4(\eta_1^2 - \eta_2^2)$ で与えられる。虚軸上に 3 つの離散固有値が存在するこのケースでは、3 つの角振動数が重なり合っている。図 5.12 は、2 重極が発生する臨界値 A_0 における空間的に分離不能な振動解を表している。このように A の大きさがわずかに変わるだけで、解の振る舞いは大きく変化した。厳密な意味における 2 重極ソリトンが実現するのは、初期振幅という連続変数において測度ゼロに過ぎない値 A_0 を与えたときだけである。しかし、 A_0 はこの値を境に系の振る舞いが大きく変わる分岐点として、重要な役割を果たしていることが数値計算からも確かめられた。初期波束を箱型に近似する簡単なモデルを導入して、空間変数の離散化による近似解法が厳密解法となる状況を作り出すことにより、このような数学的に意味のある特異点の存在を明確に示すことができた。

最後に、初期パルスの大きさをさらに大きくし、 $A = 2.36 > 3\pi/4$ とした。この

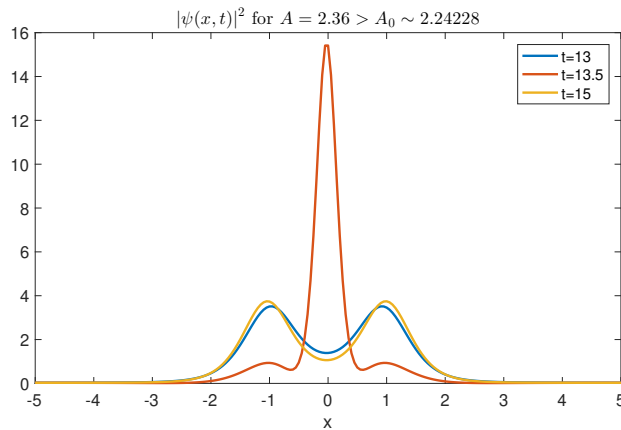


図 5.13: ポテンシャル高さ $A = 2.236$ をもつ対称な 2 連箱型初期波束に対する数値計算結果。時刻 $t = 13, 13.5, 15$ での波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

値は図 5.3(b) で新たな分枝が発生する $A = 5\pi/4$ より小さい。したがって、終状態に生成されるソリトンの数は 3 個から 2 個に減少すると予測される。離散固有値は $\eta_1 \sim 0.91$ と $\eta_2 \sim 1.26$ の 2 つで、これから振動周期 $T = 2.0682$ が予想される。この場合の数値計算結果は図 5.13 に示す通りで、時刻 $t = 13, 13.5, 15$ における波形 $|\psi(x, t)|^2$ が描かれている。 $t = 13$ と $t = 15$ の波形には、これまで座標原点に位置して最大の振幅をもっていたピークが消失し、原点对称に期待通り 2 つのピークが形成されている。しかし、 $t = 13.5$ の波形から分かるように、これら 2 つのピークは永続的ではなく、互いに融合と分離を繰り返しながら時間発展する振る舞いを見せた。図 5.14 には時刻 $10 < t < 15$ における $|\psi(0, t)|^2$ 、すなわち波形の原点 $x = 0$ における値の変化が描かれている。このように $x = 0$ での値をモニタすることによって得られた振動周期は $T = 2.045$ であり、理論からの予言値 2.0682 とよく一致している。時刻 $t = 13$ と $t = 15$ における波形が似ているのはこのことを反映していて、確かに 2-ソリトン束縛状態が形成されている。

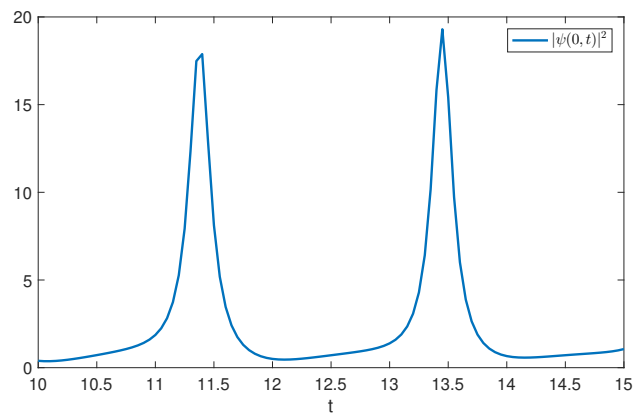


図 5.14: ポテンシャル高さ $A = 2.236$ をもつ対称な 2 連箱型初期波束に対する数値計算結果。時刻 $10 < t < 15$ における $|\psi(0, t)|^2$ 。

第6章 任意形状をした急減少パルス間の相互作用後に残留するソリトン数の解析

6.1 空間離散化による ZS 問題の近似解法：II

第5章で用いた方法では、転送行列 (5.8b) を分割数 N だけ掛け合わせる必要がある。滑らかな関数を精度よく近似しようとする、必然的に分割数 N が多くなる。そうすると、行列積の成分で与えられる近似散乱振幅の解析的表示は長大なものになり、現実的にゼロ点探索を行うことが難しくなる。第5章で用いた方法は、少数の矩形関数の和で与えられる初期波束に対して、ZS 問題の厳密な解が得られるという利点があるものの、BEC をはじめ様々な分野で現実的に生成される滑らかなパルスに対して実用的とは言えない。さらに、現実的な形状のパルスよりも角ばった矩形関数を初期値の構成に用いることによって、輻射に転じる成分を過剰に評価してしまう恐れもある。そこで、第6章では、急減少する任意の初期波束に対して ZS 問題の近似的散乱振幅を計算できる新たなアルゴリズムを展開する。空間座標 x の離散化に関する表記法は第5章で用いたものと同様であり、引き続き初期波束は近似的に幅 L の有限な領域に台をもつものとする。

まず、2成分ベクトル Ψ を

$$\Psi(x; \xi) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x; \xi) \\ \Psi_2(x; \xi) \end{pmatrix}, \quad \Psi_0(x; \xi) = \begin{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

のように導入する。次に、 2×2 の行列 Green 関数 $g(x - x')$ をステップ関数 $\theta(x)$ を用いて

$$g(x - x') = \begin{pmatrix} e^{-i\xi(x-x')}\theta(x-x') & 0 \\ 0 & e^{i\xi(x-x')}\theta(x-x') \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

と定義し、行列形式での散乱ポテンシャルを

$$U(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\psi^*(x, 0) \\ i\psi(x, 0) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

と定める。議論の出発点は、ZS問題(5.1)を第2種のFredholm型積分方程式として

$$\Psi(x; \xi) = \Psi_0(x; \xi) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x-x') U(x') \Psi(x'; \xi) \quad (6.4)$$

のように定式化することにある。もちろん解 $\Psi(x; \xi)$ は $x \rightarrow +\infty$ の極限で漸近的に Jost 関数(2.19)と一致する。逐次代入法により、積分方程式(6.4)の解を摂動級数として構成することができる。2成分ベクトル関数 $\Psi(x; \xi)$ の第1成分を考えて、Neumann級数を書き下すと、

$$\begin{aligned} \Psi_1(x; \xi) = e^{-i\xi x} + e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \theta(x-x') e^{2i\xi x'} \\ \cdot i\psi^*(x', 0) \theta(x'-x'') e^{-2i\xi x''} i\psi(x'', 0) + (\text{even}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

となる。ただし、(even)と表記した項は摂動級数における4次以上の偶数次項である。逐次代入の次数は多重散乱の回数、すなわち入射平面波 $e^{-i\xi x}$ が初期波束の形状をした散乱ポテンシャルによって散乱されて進行方向を転換する回数に一致する。そのため、Neumann級数の偶数次項のみが散乱振幅 $a(\xi)$ へ寄与する。同様に、逆向きに進行する平面波 $e^{i\xi x}$ に関する $\Psi(x; \xi)$ の第2成分を考えると、散乱振幅 $b(\xi)$ が求まり、こちらは奇数次の項のみが寄与する。

式(2.19)にしたがい、散乱振幅 $a(\xi)$ は $x \rightarrow \infty$ の極限を考えることで

$$a(\xi) e^{-i\xi x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_1(x; \xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1(x; \xi) \quad (6.6)$$

のように得られる。ここで、Neumann級数(6.5)において変数 x'' の部分積分を実施すると、

$$\Psi_1(x; \xi) = e^{-i\xi x} + \frac{e^{-i\xi x}}{2i\xi} \int_{-\infty}^x dx' |\psi(x', 0)|^2 + (\text{even}) \quad (6.7)$$

となる。これは第2章でGLM方程式(2.31)を導出する際に述べたとおり、 $|\xi| \rightarrow \infty$ の極限で散乱振幅 $a(\xi)$ が1に収束することを示している。今後の記述の便を図り、散乱ポテンシャルを位相因子 $e^{2i\xi x}$ を含むように

$$v(x) = ie^{2i\xi x} \psi^*(x, 0), \quad (6.8)$$

$$\bar{v}(x) = ie^{-2i\xi x} \psi(x, 0) \quad (6.9)$$

と再定義しておく。これらの表記を用いて、改めて散乱振幅 $a(\xi)$ を表記すると

$$a(\xi) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} A(x; \xi) \quad (6.10a)$$

$$A(x; \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \theta(x - x') v(x') \cdot \theta(x' - x'') \bar{v}(x'') + (\text{even}) \quad (6.10b)$$

となる。これから、式 (6.10b) に含まれる積分を有限サイズの行列演算で近似して $a(\xi)$ を計算する。行列演算に帰着することは数値計算を実行する上で好都合である。式 (6.10) に現れる積分を実行し極限をとるために、式 (5.2) で定義された離散変数 x_j を用いると、近似的な散乱振幅 $a(\xi)$ に対する表式は

$$a(\xi) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n; \xi) \quad (6.11)$$

となる。第5章で導入した離散的な空間座標 $\{x_j\}$ における $A(x; \xi)$ の値は有限和

$$A(x_j; \xi) = \sum_{k,l=1}^N \theta(x_j - x_k) v(x_k) \theta(x_k - x_l) \bar{v}(x_l) (\Delta x)^2 + (\text{even}) \quad (6.12)$$

により求まる。ここで、 Δx は隣接する離散座標間の間隔で、 $\Delta x = L/N$ となる。ここで $v(x_k)$ や $\bar{v}(x_l)$ といった量は式 (5.2) における各小区間で定義されているから、式 (5.4) の V_j を用いて

$$v(x_k) = ie^{2i\xi x_k} V_k^* \quad \bar{v}(x_l) = ie^{-2i\xi x_l} V_l \quad (6.13)$$

と表現できる。ここで、行列 V と \bar{V} を

$$\begin{aligned} V &= \text{diag}(ie^{2i\xi x_1} V_1^*, \dots, ie^{2i\xi x_N} V_N^*), \\ \bar{V} &= \text{diag}(ie^{-2i\xi x_1} V_1, \dots, ie^{-2i\xi x_N} V_N) \end{aligned} \quad (6.14)$$

のように導入した。さらにステップ関数行列 G を、その (i, j) 成分が $\theta(x_i - x_j) \Delta x$ で与えられるとして定義する。行列 G は下三角行列であり、陽に表示すると、

$$G = \frac{L}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

である。積分方程式の摂動的解法が意味をもつためには、Neumann 級数が収束しなくてはならないが、小区間の数 N を十分大きくとることによって、 $|V_i|L/N$ がどのインデックス i に対しても常に 1 より小さくなるようにできるので、任意の急減少初期波束に対して Neumann 級数を収束させることが可能である。行列 V 、 \bar{V} と G を用いた表記によって、Neumann 級数は

$$A(x_j; \xi) = \sum_{l=1}^N (GVG\bar{V})_{jl} + (\text{even}) \quad (6.16)$$

と書ける。散乱振幅が式 (6.11) で与えられ、初期波束が領域 $x_1 \leq x \leq x_{N+1}$ にあることから、 $a(\xi)$ は

$$a(\xi) = 1 + A(x_N; \xi) \quad (6.17)$$

と書くことができる。よって $a(\xi)$ は行列

$$W = 1 + GVG\bar{V} + (GVG\bar{V})^2 + \dots = \frac{1}{1 - GVG\bar{V}} \quad (6.18)$$

の第 N 行の成分の総和である。式 (6.18) に現れる逆行列は、逆行列を得るための優れた数値計算アルゴリズムを活用することによって容易に計算できる。

本手法のターゲットである滑らかな初期波束に対し、具体的に逆行列 W を計算した例を示す。滑らかな初期波束の例として、sech 型 1-ソリトン

$$\psi_s(x) = 2 \operatorname{sech} 2x \quad (6.19a)$$

と Gauss 型の波束

$$\psi_G(x) = 2e^{-\frac{\pi}{2}x^2} \quad (6.19b)$$

(図 6.1 参照) を与える。波束の台の幅 L は $-3.0 \leq L \leq 3.0$ となるように波束の裾を $x = \pm 3.0$ で切り落とし、それぞれの初期波束に対して $\xi = 0$ とおいて W を計算する。小区間への分割数は $N = 1200$ である。計算された逆行列 W の各成分の絶対値の自然対数を取った行列 $\log|[1/(1 - GVG\bar{V})]_{i,j}|$ を図示すると、図 6.2 と図 6.3 で示されるような下三角行列となる。さらに、散乱振幅 $a(\xi)$ の決定に寄与する第 N 行だけを取り出し、 $\log|[1/(1 - GVG\bar{V})]_{N,j}|$ を比較してみると図 6.4 のようになる。ただし、 $N = 1200$ の点において値が不連続に 0 となっているのは、下三角逆行列 W の対角成分が 1 となるためである。上で考えた 2 つの初期波束は、同じ L^2 ノルムと半値全幅をもっており、半値全幅の範囲内で、これら 2 つの関数の値の差は波束中心の値 2 の 4% 以内であるが、図 6.4 の値分布における幅の広さや対称性の違いなどに両者の違いが現れている。

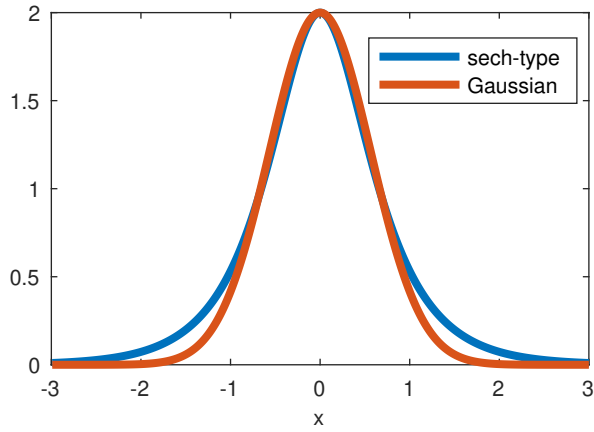


図 6.1: 2つの典型的な単峰性初期波束の波形。sech 型 1-ソリトン (6.19a) と Gauss 型 (6.19b)。

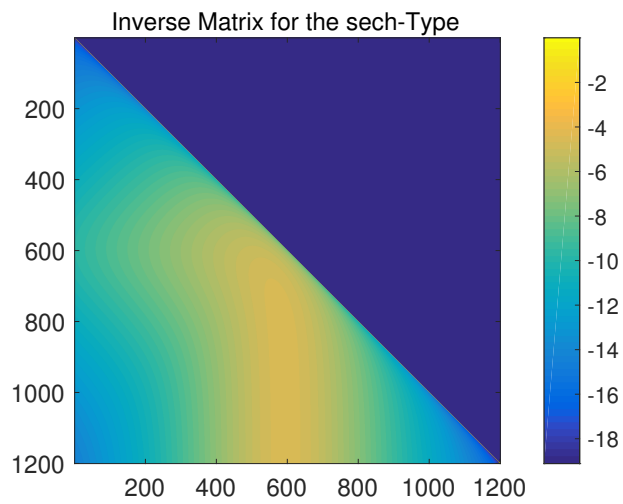


図 6.2: sech 型 1-ソリトン (6.19a) に対して $\xi = 0.0$ において計算された行列 $\log|[1/(1-GVG\bar{V})]_{i,j}|$ の 2次元プロット。

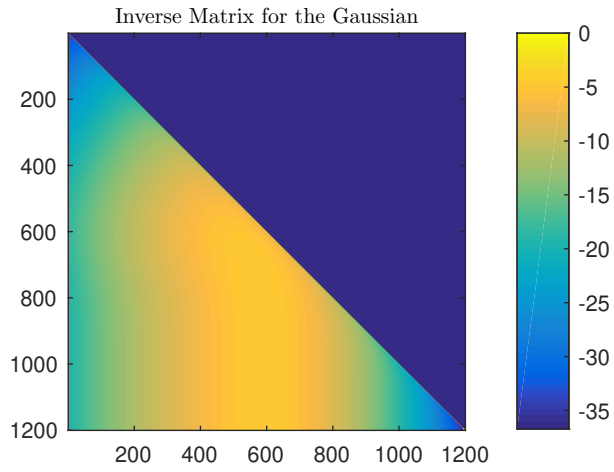


図 6.3: Gauss 型波束 (6.19b) に対して $\xi = 0.0$ において計算された行列 $\log|1/(1 - GVG\bar{V})|_{i,j}$ の 2次元プロット。

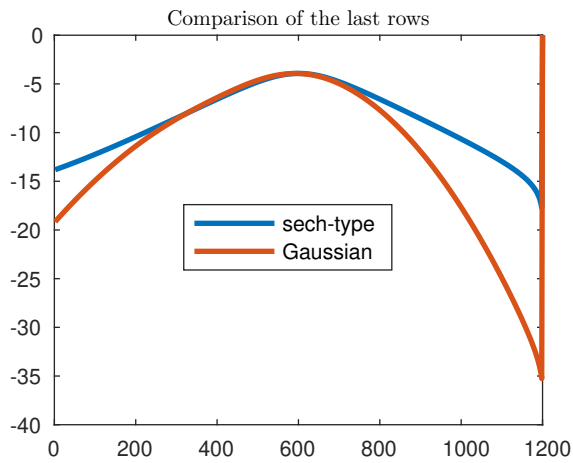


図 6.4: 式 (6.19) の 2つの初期波束に対して $\xi = 0.0$ において計算された行列 $\log|1/(1 - GVG\bar{V})|_{i,j}$ の第 N 行をプロットしたもの。

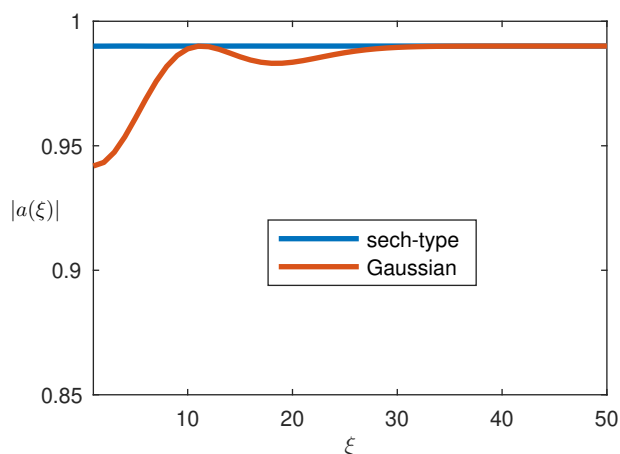


図 6.5: sech 型 1-ソリトン (6.19a) と Gauss 型 (6.19b) の 2 つの典型的な単峰性初期波束に対して計算された散乱振幅 $|a(\xi)|$ 。ただし ξ は実数。

2 つの滑らかな初期波束 (6.19a) と (6.19b) に対し、 ξ を実数として近似的な散乱振幅 $a(\xi)$ を計算した結果を図 6.5 に示す。1-ソリトンである sech 型初期波束 (6.19a) に対する $|a(\xi)|$ は、スペクトルパラメタ ξ の全域 $0.0 \leq \xi \leq 5.0$ にわたって平坦で、ほぼ 1 である。対照的に、Gauss 型初期波束 (6.19b) に対する $a(\xi)$ は定数ではない。第 2 章で述べたとおり、あらゆるソリトン型初期波束に対して $b(\xi) = 0$ となる。式 (2.16a) で $b(\xi) = 0$ としたものと式 Jost 関数の境界条件 (2.12) を見比べることにより、 $a(\xi) = 1$ であることがわかる。ただし式 (6.7) で示したとおり、ソリトン型ではない一般の初期波束に対しても $|\xi|$ が大きくなると $a(\xi)$ は 1 に近づく。図 6.5 のプロットは、これらの解析的な結果を再現している。

図 6.5 において $|a(\xi)|$ が厳密な 1 より小さい原因の 1 つは、波束の台を $x = \pm 3.0$ で切り落としたためであるが、より重要な主要因は小区間数 N が十分ではなかったことである。図 6.6 に同一の sech 型初期波束 (6.19a) に対して分割数 N を変えながら散乱振幅 $|a(\xi)|$ をプロットした結果を示す。分割数 N の増加とともに $|a(\xi)|$ が 1 に近づいている様子が確認できる。

すでに述べたとおり G と V との積が下三角行列であるため、数多く存在する専用の数値アルゴリズム活用することによって逆行列 W は容易に求められる。これに比して実用的ではないが、理論的には $a(\xi)$ を陽に書き下すことができ、

$$a(\xi) = \frac{1}{C_{11}} - \left(\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22}} + \frac{C_{13}}{C_{11}C_{13}} + \frac{C_{23}}{C_{22}C_{33}} + \dots \right) + \dots \quad (6.20)$$

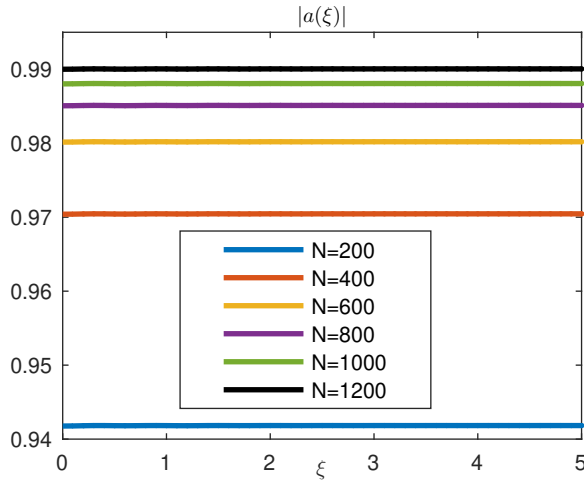


図 6.6: sech 型 1-ソリトン (6.19a) に対して計算された散乱振幅 $|a(\xi)|$ の分割数 N 依存性。ただし ξ は実数。

となる。ここで

$$C_{i,j} = [1 - GVG\bar{V}]_{i,j} = \delta_{ij} - \frac{L^2}{N^2} \sum_{l=j}^i V_l \bar{V}_l \quad (6.21)$$

という略記法を用いた。なお、式 (6.21) の第 2 項は和をとる操作を考慮すると $1/N$ の 1 次の量と 2 次の量との中間のオーダーになる。

6.2 二峰性初期波束への適用

この節では、前節で開発された手法を用い、適度な距離をおいて並べられた 2 つの滑らかな単峰性波束を重ね合わせてできる二峰性初期波束の散乱振幅 $a(\xi)$ を計算する。一般に、重畳される 2 つの単峰性波束の間には相対位相 $\Delta\phi$ が存在する。2 つの BEC による衝突実験を考える場合、別々に生成された 2 つの BEC の大域的位相がそれぞれ別個に定まっていることから、それら 2 つの巨視的波動関数の位相差が相対位相 $\Delta\phi$ となる。本節では、重ね合わせる 2 つの波束の相対位相 $\Delta\phi$ を $0, \pi, \pi/2$ と変化させ、 $\Delta\phi$ が系の終状態に及ぼす影響を調べる。スペクトルパラメタ ξ を虚数成分が正の複素数として、 ξ の複素上半面における散乱振幅 $a(\xi)$ の大きさを計算し、離散的なゼロ点の位置を調べる。以後、小区間数 N は $N = 600$ とし、スペクトルパラメタ ξ の刻み幅は実・虚軸方向ともに 0.01 とする。第 5 章と同様、得られた結果を NLS 方程式を直接 Symplectic-Fourier 法で数値積分して得られた結果と比較する。

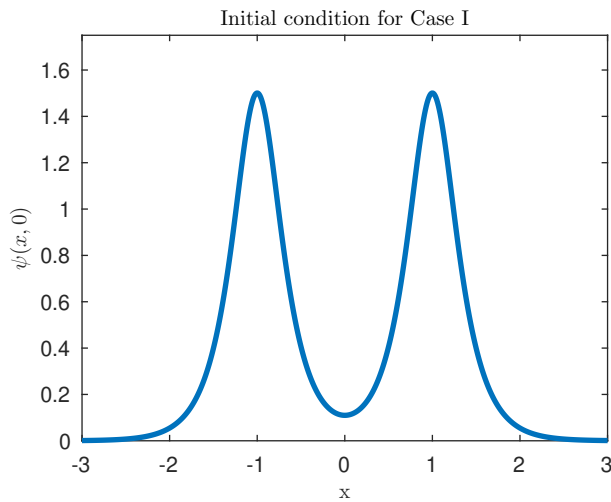


図 6.7: ケース I の初期波束 (6.22) の波形 $\psi(x, 0)$ 。左右のパルス間の相対位相は $\Delta\phi = 0$ 。

ケース I: $\Delta\phi = 0$

最初に考える初期波束は図 6.7 に示す

$$\psi(x, 0) = 1.5 \{ \operatorname{sech}[4(x - 1.0)] + \operatorname{sech}[4(x + 1.0)] \} \quad (6.22)$$

であり、重ね合わせられる 2 つのパルス間の相対位相 $\Delta\phi$ は 0 である。2 つのピークは $x = \pm 1.0$ にあり、この初期波束に対して近似計算された散乱振幅の絶対値 $|a(\xi)|$ を ξ の複素上半面における 2 次元プロットとして示したものが図 6.8 である。図 6.9 には同じ領域における $|a(\xi)|$ を立体的な 3 次元プロットとして示してある。これからわかるように、 $|a(\xi)|$ は ξ の虚軸に対して期待通り対称であり、ゼロ点は $\xi = 0.31i$ の点に 1 つだけある。つまり、系の終状態においてただ 1 つのソリトンが残留することを示している。第 2 章で述べた 1-ソリトンの解析解 (2.40) において $\eta = 0.31$ とすると、残留するソリトンの波形 $|\psi(x, t)|^2$ の中心の大きさは $(2\eta)^2 \sim 0.3844$ となる。

ケース II: $\Delta\phi = \pi$

次に相対的に逆相の関係にあるパルスを重ね合わせた

$$\psi(x, 0) = 1.5 \{ \operatorname{sech}[4(x - 1.0)] - \operatorname{sech}[4(x + 1.0)] \} \quad (6.23)$$

を初期条件にとる。相対位相は $\Delta\phi = \pi$ であり、式 (6.23) を描画すると図 6.10 のようになる。ピークは前回同様 $x = \pm 1.0$ にあるが、初期波動関数の左半分は負の

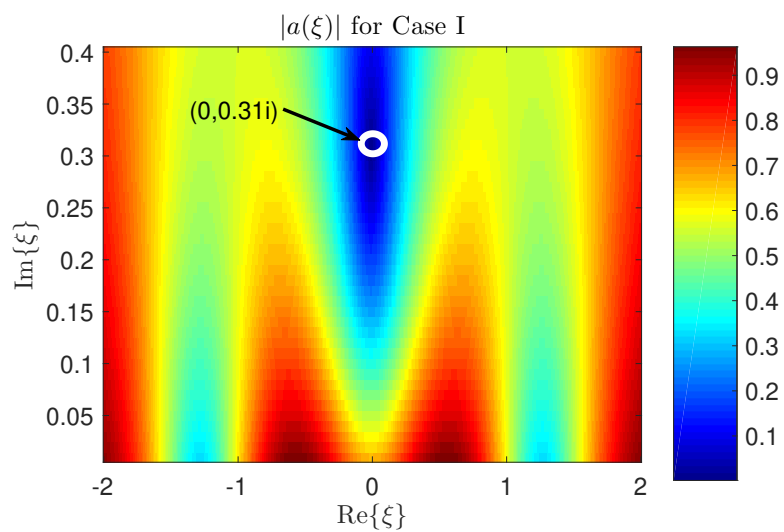


図 6.8: ケース I の初期波束 (6.22) に対して計算された、スペクトルパラメタ ξ の複素上半面における $|a(\xi)|$ の 2 次元プロット。 $\Delta\phi = 0$ 。 唯一のゼロ点は $(0, 0.31i)$ 付近。

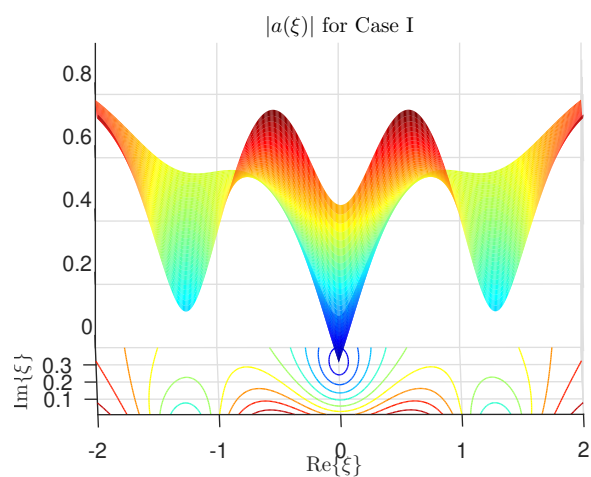


図 6.9: ケース I の初期波束 (6.22) に対して計算された、スペクトルパラメタ ξ の複素上半面における $|a(\xi)|$ の 3 次元プロット。 $\Delta\phi = 0$ 。 唯一のゼロ点は $(0, 0.31i)$ 付近。

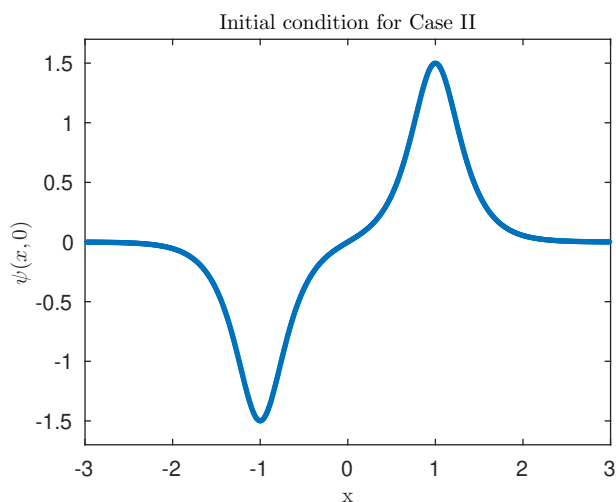


図 6.10: ケース II の初期波束 (6.23) の波形 $\psi(x, 0)$ 。左右のパルス間の相対位相は $\Delta\phi = \pi$ 。

値をとる。この初期波束に対して近似計算された散乱振幅の絶対値 $|a(\xi)|$ を ξ の複素上半面における 2次元プロットとして示したものが図 6.11 で、図 6.12 は 3次元プロットである。今回も、 $|a(\xi)|$ は ξ の虚軸に対して期待通り対称な形をしているが、ゼロ点は $\xi = \pm 0.62 + 0.17i$ の 2つに増えている。つまり、終状態において 2つのソリトンが残留することを示している。第 2章で述べた 1-ソリトンの解析解 (2.40) において $\eta = 0.17$ とすると、残留するソリトンの波形 $|\psi(x, t)|^2$ の中心の大きさは $(2\eta)^2 \sim 0.1156$ となる。また、波形の移動の速さを決める ζ に関して $\zeta = 0.62$ とすると、初期波束が瞬時にソリトンになったという仮定のもとに時刻 t において期待される移動距離は $4\zeta t$ であり、 $t = 45$ であるならば、距離 111.6 だけ移動していることになる。

ケース III: $\Delta\phi = \pi/2$

最後に、相対位相 $\Delta\phi = \pi/2$ をもつ 2つのパルスの重ね合わせ

$$\psi(x, 0) = 1.5 \{ \operatorname{sech}[4(x - 1.0)] - i \operatorname{sech}[4(x + 1.0)] \} \quad (6.24)$$

を初期条件にとる。この初期波束は複素数値をとるので式 (6.24) の絶対値をとって描画すると図 6.13 のようになる。この初期波束に対して近似計算された散乱振幅の絶対値 $|a(\xi)|$ を ξ の複素上半面における 2次元プロットとして示したものが図 6.14 で、図 6.15 は 3次元プロットである。今回は、 $|a(\xi)|$ の ξ の虚軸に対する対称性が崩れていて、2つのゼロ点 $\xi_1 = 0.33 + 0.27i$ と $\xi_2 = -0.93 + 0.01i$ の虚数成分の大きさは同じではない。第 2章で述べた 1-ソリトンの解析解 (2.40) より、振幅

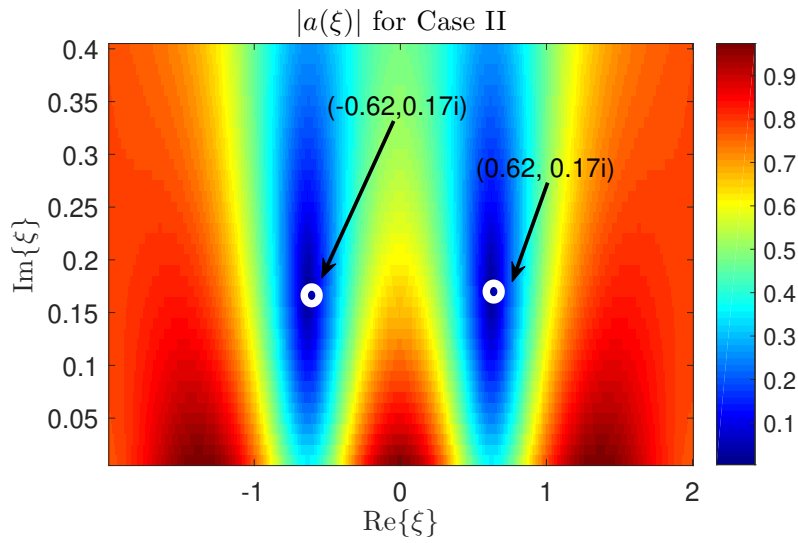


図 6.11: ケース II の初期波束 (6.23) に対して計算された、スペクトルパラメタ ξ の複素上半面における $|a(\xi)|$ の 2 次元プロット。 $\Delta\phi = \pi$ 。 2 つのゼロ点は $(\pm 0.62, 0.17i)$ 付近。

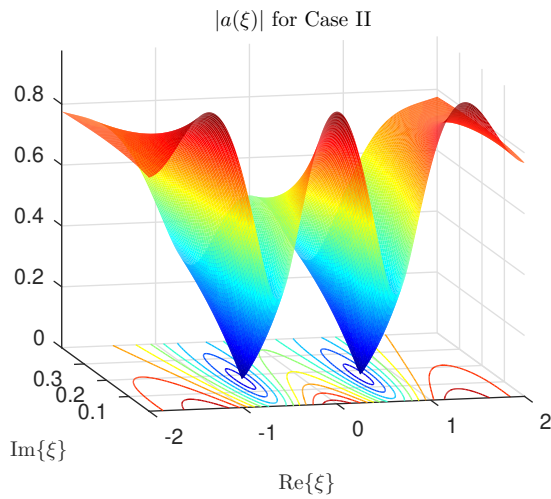


図 6.12: ケース II の初期波束 (6.23) に対して計算された、スペクトルパラメタ ξ の複素上半面における $|a(\xi)|$ の 3 次元プロット。 $\Delta\phi = \pi$ 。 2 つのゼロ点は $(\pm 0.62, 0.17i)$ 付近。

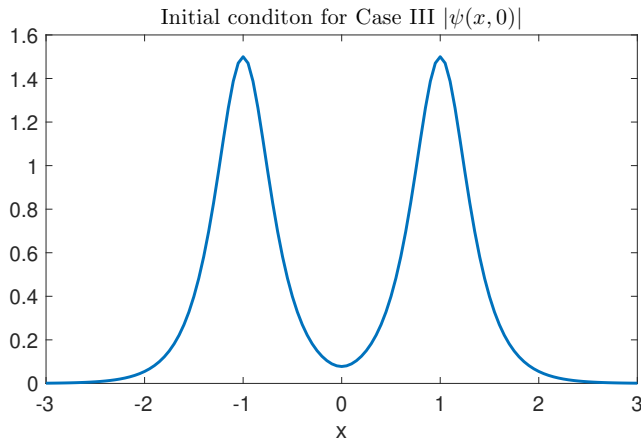


図 6.13: ケース III の初期波束 (6.24) の絶対値 $|\psi(x,0)|$ 。左右のパルス間の相対位相は $\Delta\phi = \pi/2$ 。

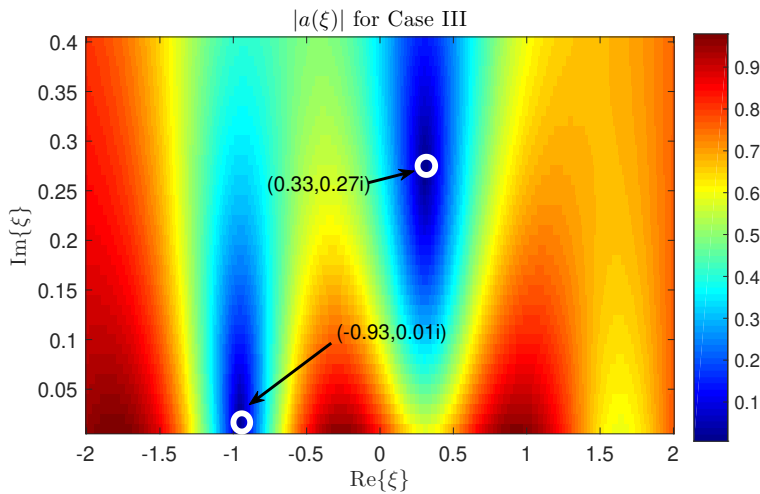


図 6.14: ケース III の初期波束 (6.24) に対して計算された、スペクトルパラメタ ξ の複素上半面における $|a(\xi)|$ の 2次元プロット。2つのゼロ点は $(0.33, 0.27i)$ と $(-0.93, 0.01i)$ 付近。

の大きいソリトンは ξ_1 に対応し、波形中心の大きさは 0.2916 となる。 $t = 25$ のときの移動距離は 33 で x が正の方向に進むことが見込まれる。一方で、 ξ_2 に対応するソリトンの波形中心の大きさは 0.0004 と極めて小さくなるため、ソリトンになるまで数値計算を行うことは難しいが、振幅を下げながら左側に進行する波束中心は $t = 25$ において $x = -93$ 近傍にあることが見込まれる。

6.3 数値シミュレーションとの比較

前節では、本論文で開発した ZS 問題の近似解法を相対位相 $\Delta\phi = \{0, \pi, \pi/2\}$ をもつ二峰性の初期波束に適用し、散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点を調べた。本節ではこれ

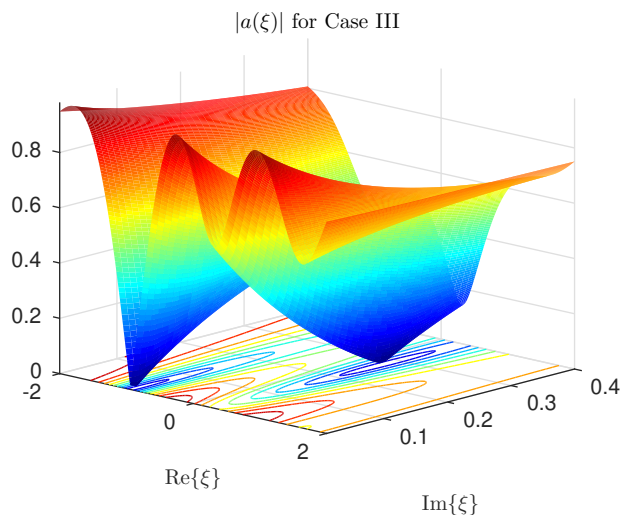


図 6.15: ケース III の初期波束 (6.24) に対して計算された、スペクトルパラメタ ξ の複素上半面における $|a(\xi)|$ の 3 次元プロット。2 つのゼロ点は $(0.33, 0.27i)$ と $(-0.93, 0.01i)$ 付近。

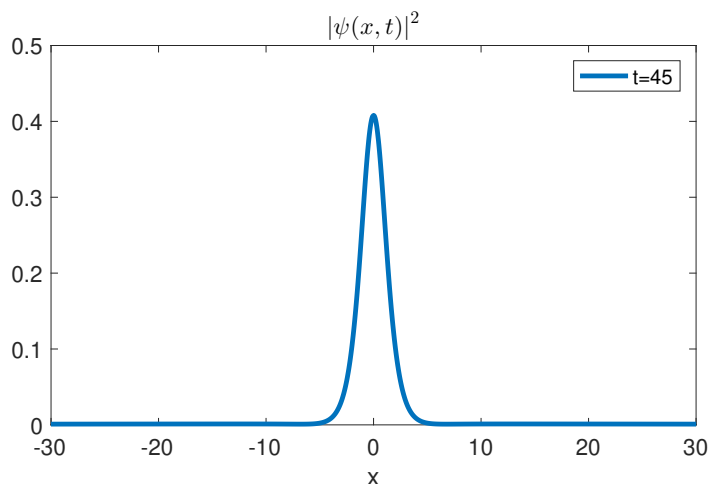


図 6.16: ケース I の初期波束 (6.22) の時間発展。時刻 $t = 45$ における波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

らの結果の妥当性を確かめるために NLS 方程式の直接的な数値積分を行った結果を示す。

ケース I: $\Delta\phi = 0$

図 6.16 には初期波束 (6.22) を時刻 $t = 15$ まで時間発展させた場合の波形 $|\psi(x, t)|^2$ が描かれており、 $x = 0$ 付近に単一のパルスが残留していることが確認できる。前節の計算で、 $t \rightarrow \infty$ でソリトンの中心の大きさが 0.3844 と予言されていたのに対し、数値計算により得られた $t = 45$ での波束の中心の大きさは 0.408 とこれに近い。

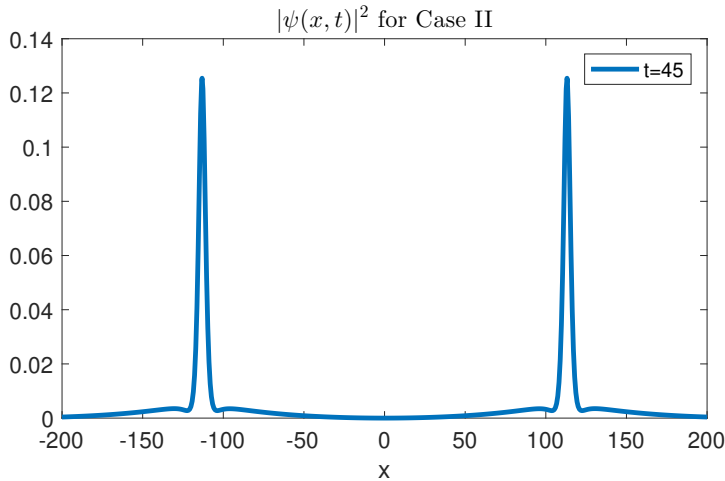


図 6.17: ケース II の初期波束 (6.23) の時間発展。時刻 $t = 45$ における波形 $|\psi(x, t)|^2$ 。

ケース II: $\Delta\phi = \pi$

図 6.17 には初期波束 (6.23) を時刻 $t = 45$ まで時間発展させた場合の波形 $|\psi(x, t)|^2$ が描かれており、原点对称に予想通り 2 つのパルスが形成されている。これらのパルスの振幅は時間的に減衰しなかった。終状態にできるソリトンの波形に関する前節の予言値は、 $|\psi(x, t)|^2$ の中心の大きさが 0.1156、時刻 $t = 45$ における波束中心の位置は ± 111.6 であった。これらの値に対し、数値計算により得られた $t = 45$ での波束中心の大きさは 0.1254、2 つのピークの座標は ± 113.2 であり、予言と整合している。

ケース III: $\Delta\phi = \pi/2$

図 6.18 には初期波束 (6.24) を時刻 $t = 45$ まで時間発展させた場合の波形 $|\psi(x, t)|^2$ が描かれており、原点に対して非対称に 2 つのパルスが形成されている。振幅の大きいパルスの波形中心の大きさは漸近的に 0.2916 で、 $t = 25$ のときの移動距離は x が正の方向に 33 進むことが見込まれる。図 6.18 における右側のピークは $x = 31.65$ で 0.2886 をとっているので予言と整合している。一方、振幅を下げながら左側に進行する左側の波束の中心は $t = 25$ において $x = -93$ 近傍にある、という予言に対し、数値積分の結果は $x = -94.4$ となり、こちらもよい一致を見せている。

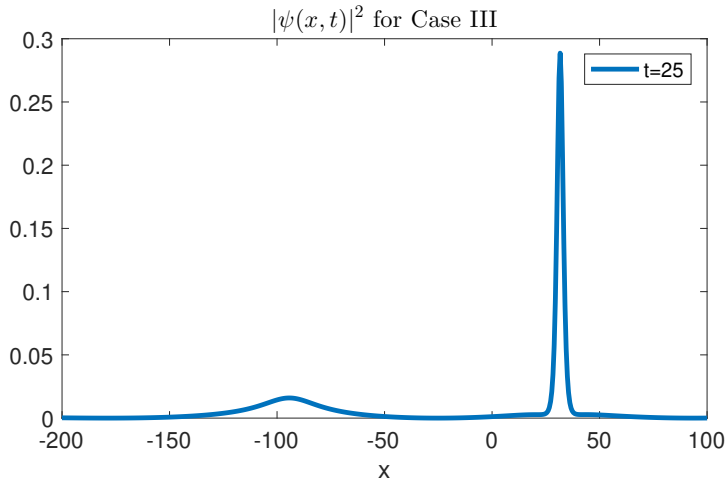


図 6.18: ケース III の初期波束 (6.24) の時間発展。時刻 $t = 25.0$ における波形 $|\psi(x,t)|^2$ 。

6.4 BEC 実験に対する ZS 問題解析の意義

第 5 章と第 6 章のいずれにおいても、2 つ並んだ非ソリトン型初期波束から放出される輻射同士の干渉が系の終状態において生成されるソリトンの数に及ぼす影響を調べるため、ZS 問題 (2.8) を通じた解析を行った。しかし、第 5 章と第 6 章で用いた方法は同一ではない。第 5 章で用いた方法は、初期波束を矩形関数の和に置き換えてしまっている点で非現実的であり、BEC による実験と直ちに比べられるものではない。一方の第 6 章では、独自に開発した方法により、互いに相対位相をもった滑らかな非ソリトン型パルスをもつ 2 つ重ね合わせた初期波束に対して輻射の影響を調べる事が可能になった。そして、2 つの初期パルス間の相対位相によって最終的に生成されるソリトンの数が変化することが確認された。実験系の分解能が向上すれば、よりリアルで複雑な初期波束形状を用いたシミュレーションも可能になる。

しかし、実際の実験において別々に生成された 2 つの BEC の間の相対位相を前もって知ることは原理的に不可能であって、実験結果は常に不定ということに注意する必要がある。このような不定性は解として複素数値を許す NLS 方程式が記述する物理系に特有なものであり、実数値関数を解にもつその他のソリトン方程式に対する初期値問題においてはそのような不定性は存在しない。

そういう意味において、第 6 章で開発した方法の価値は、系の時間発展の予測を目的とした順問題を解く手段としてよりも、系の終状態の情報から逆に系の初期状態を復元する逆問題を解析する手段を与えたことにある。すなわち、本章で展開した方法を用いれば、任意の相対位相を与えられた初期パルスから構成される

初期波束に対してその終状態を予言できる。特に、多数の相対位相に対する解析結果をライブラリ化しておき、実験結果とこのライブラリのデータを照合すれば、準備された初期波束の相対位相を推定することができる。そして、多くの BEC 対を用いた実験結果から推定された相対位相の分布から、2つの独立に生成された BEC の相対位相の出現頻度に偏りがないかを調べることができる。第6章で示された通り、パルス同士の相互作用においてパルス間の相対位相は極めて重要な役割を果たし、それによって系の終状態が左右される。したがって、仮に相対位相の出現頻度に偏りが存在していれば、そのような実験系を用いて生成された BEC 対を用いて行われた衝突実験の結果は統計的なバイアスをもつことになる。実際に、粒子線物理学では最終結果の統計平均を取るためにビームのスピンの偏極の度合いを表す密度行列の推定が行われているが [74]、相対位相の出現頻度の分布の推定も同様の意義をもつものである。

第7章 結 論

本論文では、1次元の引力型 TDGP 方程式および NLS 方程式の初期値問題を解析した。特に、非ソリトン型の初期波束から放射される輻射が系の時間発展にもたらす効果に着目し、初期波束は全て非ソリトン型に選んだ。これらの方程式は原子導波路中を伝搬する BEC の時間発展を記述し、原子光学において重要な意味をもつ。

7.1 局所ポテンシャルによる波束散乱

様々な幅をもつ箱型・井戸型ポテンシャルに非ソリトン型 (Gauss 型) の初期波束を入射させ、波束の反射率や透過率が初期波束中心の位置と系の非線形性の強さにどのように依存するかを数値的に調べた。このような局所ポテンシャル散乱は原子光学においては物質波のノルムを分割するビームスプリッターのモデルになっている。その結果、

- 井戸型ポテンシャルを用いた場合には、入射波束の一部の成分が捕捉されてしまい、井戸中に滞留し続ける成分が発見された。

ビームスプリッターにとってこのような捕捉された成分の存在は好ましくないため、この結果は、原子光学素子としては井戸型 (引力型) ではなく箱型 (斥力型) のポテンシャルを用いる方がよいことを示している。一方、このような捕捉現象は線形の系においては原理的に発生し得ない。そのため、非線形波動や散乱理論の立場からこの結果を見ると、非線形波動方程式における波束散乱を特徴付ける現象として、非常に興味深い。現時点で $t \rightarrow \infty$ においても井戸中に波束の一部が残留し続けるかどうかは不明であり、厳密な解析にはこれらの非線形媒質中におけるポテンシャル散乱理論を数学的に発展させることが必要である。現在のところそのような理論の構築は成功していないが、将来に向けて非常に重要かつ興味ある研究テーマが見出されたと言える。

さて、上で述べた捕捉成分の影響を避けるように定義した反射率 R_{box} と透過率 T_{well} を調べると、

- 初期波束から箱型/井戸型ポテンシャルまでの距離 x_0 に依存して、反射率 R_{box} と透過率 T_{well} の値が変化することが見出された。

もし、初期条件として1-ソリトン解を選んでいた場合、初期波束はポテンシャルの影響が効いてくるまでほぼ自由に伝搬する。その間の波束形状は不変であるため、散乱結果が x_0 に依存することはない。したがって、上の結果は輻射を放出しながら形状を変化させる非ソリトン型初期波束を与えたために起こったものである。本研究の結果は、非ソリトン型初期波束の崩壊に伴う形状変化がビームスプリッターの性能に影響を与える事実に留意すべきことを示唆している。すなわち、原子光学的なビームスプリッターの評価においては、実験条件で決まる不定性の範囲内で初期波束を規定するパラメータを変動させながらシミュレーションを繰り返し、 R_{box} や T_{well} の上/下限を算出することが望ましい。

ところで、上で述べたような「伝搬中の波束形状の変化によって散乱結果が影響される」という現象自体は、波束が一方的に拡散する線形の量子力学の場合でも期待されることである。しかし、入射波の単色性が失われたとしても、系が線形であれば波束のスペクトルは時間的に不変であるため、ポテンシャル幅 a の変化とともに R_{box} や T_{well} に周期的な変化が期待される。ところが、

- 結合定数 $g < 0$ の絶対値が大きくなると箱型/井戸型のどちらのポテンシャルに対してもポテンシャル幅 a に依存した R_{box} や T_{well} の周期的変化が消失した。

これはやはり系の非線形性によってもたらされたものと考えなくては説明できない事柄である。ポテンシャル幅 a に依存した R_{box} や T_{well} の周期的変化は入射波と反射波の干渉によってもたらされる波動現象であるため、その消失は引力自己相互作用によって系の粒子性が強くなったことを反映しており、これも非線形波動方程式における波束散乱を特徴付ける現象として非常に興味深い。

7.2 運動量空間の波形におけるパターン形成と輻射の検出可能性

本研究では数値計算手法に Symplectic-Fourier 法を採用したため、実空間のみならず運動量空間の波形もモニタリングすることができた。一般に、十分な振幅をもつ非ソリトン型波束は、振幅を振動させながら輻射を放出し、 $t \rightarrow \infty$ で生成されるソリトン解に向かって波形を変化させる。そのような波束を与えると、

- 時間発展の過程で、運動量空間における波形に高周波の鋸状パターンが形成されることが見出された。

本研究は、NLS 方程式を用いた解析により、上記の鋸状パターン生成のメカニズムが

- 振幅を振動させながら輻射を放出する波束の本体部分と、波束の本体部分から放出されて左右に拡散する輻射が運動量空間において干渉した結果である

ことを明らかにした。したがって、この現象の発生には、非ソリトン型波束から放出される輻射の存在が不可欠である。この結果は、従来その振幅の小ささゆえに直接的な観測が難しいとされてきた輻射の存在を、運動量空間における波形に形成される高周波パターンの観測を通じて検出する可能性があることを示唆している。ただし、非線形ファイバ光学など多くの分野では運動量空間における波形を観察することができないため、この方法による輻射の検出は難しい。これに対し本研究では、準1次元系において引力型自己相互作用する BEC が、輻射検出に向けた物理系の重要な候補になりうることを指摘した。実際に実験を行うには、BEC の崩壊を回避しつつ、振幅の振動を発生させるのに十分な粒子数を確保する必要がある。Feshbach 共鳴の技術を用いて BEC を構成する原子間の引力相互作用の大きさを調整すれば、これら2つの要求を同時にクリアできる可能性はある。

7.3 崩壊する2連箱型初期波束同士の干渉が終状態へ及ぼす影響

本研究では、非ソリトン型初期波束が単一のパルスではなく複数連なっている場合において、初期波束の崩壊に伴って放出される輻射がもたらす干渉効果に着目

した。研究手段として、NLS 方程式の直接的な数値積分に訴えるのではなく、ソリトン理論の主要な成果である逆散乱法を活用し、定常的な ZS 問題 (2.8) を解析することによって系の終状態に関する情報を引き出す方法をとった。

まず、先行研究で提案された方法を用い、初期波束に対する散乱振幅 $a(\xi)$ を計算した。初期波束として単一パルスではなく、距離 w をおいて配置された 2 つの矩形関数を与え、矩形関数の振幅ごとに散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点を探索することにより、終状態において残留するソリトンの数を求めた。このような矩形関数の和で与えられる初期波束に対して、先行研究の方法は厳密な結果を与える。そして 2 つの矩形関数が同じ振幅をもつ場合、

- 終状態で生成されるソリトンの数は、初期パルス間の距離 w に依存し、2 つの初期パルスの共通振幅に対して生成されるソリトン数が単調に増加しないような w の範囲が存在する

ことを示した。これに対して、単一パルスの振幅を増やしていったときには、終状態で生成されるソリトンの数は振幅の単調増加関数となることが解析的に示せる。また、 w を非常に大きくすると 2 つの初期パルスから放出される輻射の干渉効果が消失することも解析的にわかる。したがって、終状態におけるソリトン数の非単調な変化は非ソリトン初期波束から放出される輻射同士の干渉によるものであることが本研究によって準解析的に示された。さらに、

- 数学的特異点として、散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点が 1 位の極ではなく、多重極となるようなパラメタが存在することがわかった。

理論的に多重極ソリトンの存在はよく知られているものであるが、最初から多重極ソリトンの厳密解を与えるのではなく、初期パルスからの崩壊過程でこのような特異点が生成され得ることを示したことは意義深い。本研究において見出された特異点は、2 つの矩形関数の共通振幅を上げていったときに、終状態で生成されるソリトン数が 1 から 3 へ転移する境界に出現した。この点 A_0 で起こる現象を見るために、NLS 方程式の直接的な数値積分を行ったところ、

- 共通振幅が A_0 より低い場合、輻射間の中の干渉により発生した 3 つのパルスのうち $x = 0$ 付近に形成された 1 つを除く残り 2 つのパルスは輻射として $x = 0$ の左右に拡散していくが、この A_0 付近では左右に形成されたパルスの拡散は極めて緩慢になり、 A_0 を超えると 3 つのソリトンが融合した束縛状態へ転移する

振る舞いが観察された。このような数学的特異点が発生するのは測度0の特定パラメタを選んだ時のみであるが、その存在は2つのパルスの拡散が急激にスローダウンする振る舞いによって捉えられることがわかった。 A_0 よりわずかに小さい振幅では、数学的には輻射と分類されるパルスも寿命が極めて長くなるので、仮に実験でこのようなパラメタが実現されたとすると、2つの初期パルスから3つのパルスが生成されたかのように見える可能性がある。

さらに、2つの矩形関数のうち片方がもう片方の $1/\sqrt{2}$ となる振幅を有する非対称な初期波束の場合に計算された $a(\xi)$ のゼロ点の軌跡はさらに複雑になった。BECのパルス列を生成した実験 [35] では、非ソリトン型の初期パルスが多数隣接して形成された。これらの初期パルスは、対向レーザーが作る定在波によるポテンシャルを1つの大きなBECに作用させ、これを複数の小パルスに切断することによって用意された。このような準備方法からみて、初期パルスはいずれも非ソリトン型の形状であったとみられる。この実験では、時間発展の過程でパルス数の変化が見られたが、このようなパルス数の変化は、非ソリトン型パルスから放出される輻射によって引き起こされた可能性がある。

7.4 相対位相をもつ2つの非ソリトン型波束を重ね合わせて得られる二峰性初期波束においてパルス間相互作用が終状態に及ぼす影響

第5章において、矩形関数の和で与えられる単純な初期波束形状を仮定することにより、輻射が引き起こす干渉効果が系の終状態に大きな影響を与える場合があることを示した。しかし、現実的な波形と矩形関数の和で表される波形の乖離は大きい。また、現実的な形状のパルスより角ばった矩形関数を初期値に用いることによって、輻射に転じる成分を過剰に評価してしまう恐れもある。そこで本研究では

- 急減少する任意の初期波束に対してZS問題の近似的散乱振幅 $a(\xi)$ を計算できる新たなアルゴリズムを開発し、現実的な滑らかさをもつ初期波束に対して終状態の情報を引き出せるようにした。

リアルな初期波束に対してその $t \rightarrow \infty$ での情報を定常的なZS問題の解析から引き出す方法を開発したことは、直接的な数値積分の妥当性を検証・裏書きす

る方法をも与えたという点で意義がある。一般に、系の終状態に関する情報が知りたいとき、実際に $t \rightarrow \infty$ まで数値積分を遂行することは不可能であるし、それ以前に素早く拡散する輻射が計算領域の両端に達してしまう問題や、数値誤差の蓄積の問題がつきまとう。しかし、定常的な ZS 問題の解析に基づく方法では、これらの原理的問題を回避することができる。

この方法を用いて、相対位相をもつ 2 つの非ソリトン型波束を重ね合わせて得られる二峰性初期波束においてパルス間相互作用が終状態に及ぼす影響を調べたところ、

- 重ね合わせられる 2 つの初期パルスの波形が同一であっても、初期相対位相が異なると、終状態に生成されるソリトン数や波形が複雑に変化することがわかり、これらの結果と NLS 方程式の直接数値積分による結果との整合性も確かめられた。

実際には、2 つの独立に生成された BEC の相対位相を前もって知ることは不可能である。しかし、2 つの初期パルス間に色々な相対位相を仮定して得られる計算結果をライブラリ化しておけば、BEC の実験結果とこのライブラリのデータを照合することによって、準備された初期波束の相対位相を逆に推定することができる。2 つの独立に生成された BEC の相対位相はランダムであることが期待される。多くの BEC 対を用いた実験から推定された相対位相の分布をチェックすることにより、相対位相のつき方に偏りがないかを調べることができる。パルス同士の相互作用においてパルス間の相対位相は極めて重要な役割を果たし、それによって系の終状態が左右される。仮に相対位相のつき方に偏りが存在していれば、そのような実験系を用いて生成された BEC 対を用いて行われた衝突実験の結果は統計的なバイアスをもつことになる。したがって、ある系が生成する BEC 対の相対位相の偏り度合いを評価する方法を与えたことは、原子光学の実験を精度よく行う上で重要である。

なお、本研究で開発された方法はより広いクラスのソリトン方程式にも適用可能である。まず、AKNS 形式と呼ばれるクラスには NLS 方程式以外に Korteweg-de Vries (KdV) 方程式、変形 KdV 方程式、sine-Gordon 方程式といった重要な方程式群が含まれている [75]。また、微分型 Schrödinger 方程式を含むクラスである Kaup-Newell 形式 [76] や、ループソリトン方程式を含む Wadati-Konno-Ichikawa 形式 [77] に対しても、本論文で展開した方法を拡張可能であり、それぞれの方程式が記述する系に応じて興味深い物理を引き出せる可能性がある。

7.5 数学的な発展の方向性

本研究は、原子光学的な興味の枠を超えて、純粋に数学的な課題をいくつか見出した。そのような課題の例として、井戸型ポテンシャルに対する波束の動的散乱問題における波束の捕捉現象やその永続性の証明をすでにあげた。ここでは、数学的に興味深いと思われるその他の課題をあげる。

本論文では2つの異なる方法を用いて散乱振幅 $a_L(\xi)$ を近似計算した。ここで、パラメタ L は初期波束をコンパクトに近似する際に導入した近似波束の切り落とし幅である。これら2つの量を等しいとおいて、

$$a_L(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{i\xi L} \prod_{i=1}^N T_i \right)_{1,1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1 - GVG\bar{V}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_N \quad (7.1)$$

となる。ただし、 T_i は i 番目の小区間の転送行列 (5.8b) で、右辺は行列 $[1 - GVG\bar{V}]^{-1}$ の第 N 行の総和である。ここで、比 L/N を十分小さく保って $L \rightarrow \infty$ とすると、

$$a(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} a_L(\xi) \quad (7.2)$$

となる。式 (7.1) はこの論文の主結果の1つとしての定理を与え、I) 初期 Jost 関数に対して連続的に転送行列を作用させる操作と、II) 初期波束の形状をした散乱ポテンシャルで散乱された入射平面波の方向転換に関する、可能なすべての経路に対して和をとる操作の等価性を主張している。この式を用いてどのような命題が引き出せるかを追求するのも今後の課題の1つである。

本論文第6章では、本研究で開発した上記 II) の方法によって計算された散乱振幅 $a(\xi)$ の絶対値を、 ξ の複素上半面上で3次元プロット (図 6.9, 図 6.12, 図 6.15) として示した。これらの図は全て、散乱振幅 $a(\xi)$ ゼロ点の個数といった、初期波束の特徴が表現された幾何学的な図形である。終状態に生成されるソリトンの決定には、散乱振幅 $a(\xi)$ のゼロ点だけが問題となる。そこで、本文中には絶対値 $|a(\xi)|$ のみのプロットを示したが、本来これらの図形は $a(\xi)$ の位相情報も含んだ複素幾何学的な図形である。

また、NLS 方程式によって記述されるシステムは Hamilton 系であるため、作用変数

$$J(\xi) = -\frac{1}{\pi} \log \{ a(\xi) a^*(\xi) \} \quad (7.3)$$

と角変数

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{b(\xi)}{b^*(\xi)} \right\} \quad (7.4)$$

とが存在し、これら2つの変数によって系の Hamiltonian を書き表すことができる。本論文で展開した方法を用いると散乱振幅 $a(\xi)$ と $b(\xi)$ を所望の精度で近似計算可能であるので、 ξ の複素上半面において作用変数 $J(\xi)$ と角変数 $\theta(\xi)$ も計算することができる。これらの変数もまた、初期波束の情報が違った切り口から投影された複素幾何学的な図形となるはずである。これらの幾何学的図形の性質を調べるほか、何らかの幾何学的特徴量を定義して実際の物理と対応する情報を与えることがどの程度可能であるか検討することも、興味ある課題である。

付録 A ソリトン方程式の初期値問題の適切性

第 6 章で書き下した Neumann 級数を用いることによって、KdV 方程式と NLS 方程式の初期値問題の適切性に関するよく知られた結果を簡単に示すことができる。まず、KdV 方程式に対して行列形式の ZS 問題

$$\Psi_x = S\Psi, \quad S = \begin{pmatrix} -i\xi & -V(x) \\ -1 & i\xi \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

を考える。ここで、関数 $V(x) > 0$ は未知関数 $\psi(x, t)$ の初期値である。KdV 方程式の初期値問題では、初期値として任意の係数 $V_0 > 0$ がかかったデルタ関数を設定できることが知られていて、終状態においてただ 1 つのソリトンが生成される。これは KdV 方程式の ZS 問題 (A.1) が定常 Schrödinger 方程式になるからである。

実際に、 $V(x) = V_0\delta(x)$ とおいてみると、散乱振幅 $a(\xi)$ を与える Neumann 級数は

$$a(\xi) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{2i\xi x'} (-V_0)\delta(x')\theta(x' - x'')e^{-2i\xi x''} (-1) + (\text{even}) \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで、変数 x'' に関する積分がステップ関数の Fourier 変換そのものであることに注意すると

$$a(\xi) = \frac{2i\xi + V_0}{2i\xi} + (\text{even}) \quad (\text{A.3})$$

を得る。次に、(even) と略記された偶数次数の高次項が全て消えることを見る。まず、最初の項

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx^4 e^{2i\xi x^1} (-V_0)\delta(x^1)\theta(x^1 - x^2)e^{-2i\xi x^2} (-1) \cdot \theta(x^2 - x^3)e^{2i\xi x^3} (-V_0)\delta(x^3)\theta(x^3 - x^4)e^{-2i\xi x^4} (-1) \quad (\text{A.4})$$

を考えて、変数 x^3 と x^1 の積分を行うと

$$V_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx^4 \theta(-x^2)e^{-2i\xi x^2} \theta(x^2)\theta(-x^4)e^{-2i\xi x^4} \quad (\text{A.5})$$

となるが、因子 $\theta(-x^2)\theta(x^2)$ のために上式は 0 になる。このことはすべての高次項で起こる。したがって ξ の複素上半面において純虚数のゼロ点は確かにただ 1 つだけであることがわかる。

これと対照的なのが NLS 方程式であって、NLS 方程式には原理的にデルタ関数型の初期波束を設定することは許されない。例えば、 V_0 を任意の複素数とするとき、 $V_0\delta(x)$ のように表される初期波束は不適切である。なぜならば、散乱振幅 $a(\xi)$ を与える Neumann 級数のうち最初の 2 つの項を抜き出すと

$$a(\xi) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{2i\xi x'} (iV_0^*) \delta(x') \theta(x' - x'') e^{-2i\xi x''} (iV_0) \delta(x'') + (\text{even}) \quad (\text{A.6})$$

となるが、ここで x' と x'' に関する積分を行うと

$$a(\xi) = 1 - |V_0|^2 \theta(0) + (\text{even}) \quad (\text{A.7})$$

という無意味な式に導かれるからである。

付録B 非線形波動研究史概観

真空中の電磁波などを除き、多くの媒質中では波動の振幅増大とともに解の重ね合わせの原理が成り立たなくなる。こうした非線形媒質中を伝搬する非線形波動は、理工学における様々な分野の研究者たちの興味を引き、理論・実験の両面から多くの研究がなされてきた [27–34]。特に、非線形波動方程式中の分散効果と自己収束効果との均衡は、パルスの形状を全く変えないで媒質中を伝播する孤立波解の存在をもたらし、大変興味深い。このような孤立波の中でも、複数パルス間衝突の際に安定的に振る舞い、粒子的な性質をもつものは、一般に「ソリトン」と呼ばれている。そして、ソリトン、あるいはソリトンを解にもつ非線形波動方程式であるソリトン方程式を研究する分野がソリトン理論である [47–54]。

ソリトン研究の歴史は、流体力学において J. Scott Russell が浅い運河を崩壊せずに進行する孤立波の存在を報告したことに始まる [79]。孤立波の存在は長い論争の的であったが、Korteweg と de Vries が、この孤立波を記述するソリトン方程式である KdV 方程式を導き、孤立波の存在が証明された [80]。しかし、長らく KdV 方程式は、流体力学の限定された場面で現れるモデル方程式と見做されていた。KdV 方程式の発見から半世紀以上経過した第二次世界大戦後、解析的アプローチが困難な数学・物理学上の問題に対して、大型計算機を援用した研究が盛んに行われるようになった。Fermi、Pasta、Ulam は 1 次元の非線形ばね格子に与えられたエネルギーのモード間輸送に関する数値計算を行い、当初予期されていた「各モードへのエネルギー等分配」が実現されないことを見出した [81]。そして、Kruskal と Zabusky は、非線形ばね格子の連続極限として導かれる KdV 方程式の初期値問題の数値計算を行い、非線形ノーマルモードである「ソリトン」の発生がエネルギー等分配則の成立を妨げていることを突き止めた [82]。また、パルス間衝突のもとで安定な、粒子的な相互作用をする孤立波を「ソリトン」と名付けた。

このように、ソリトンの発見はまず KdV 方程式においてなされた。その後、Gardner と Morikawa がプラズマ中で磁場に垂直に伝搬する磁気流体波を記述するモデル方程式としての KdV 方程式を導出してからは、KdV 方程式は非線形物理学にお

いて汎用性のあるモデル方程式として認知されるようになった [83]。ソリトン方程式として広く認知されていたのは長らく KdV 方程式のみであったが、Gardner と Morikawa が KdV 方程式の導出に用いた漸近的領域における摂動的方法が谷内によって「逓減摂動法」として体系化され、基本的なソリトン方程式が 1960 年代に続々と発見された。実際、逓減摂動法をプラズマに印加される様々な摂動に対して適用することにより、KdV 方程式以外にも変形 KdV 方程式や 3 次の非線形項をもつ非線形 Schrödinger (NLS) 方程式などのソリトン方程式が導かれ、プラズマは非線形波動現象の宝庫とも言われるようになった [84, 85]。

ここで登場した NLS 方程式は、光電場に対して媒質の屈折率が非線形に応答する Kerr 効果のもとでファイバを伝搬する光パルスを描述することが示された [86]。そのため、NLS 方程式は、ロバスト性に優れた光ソリトン通信を実現しようとする非線形ファイバ光学の提唱で脚光を浴びた [87–92]。NLS 方程式は、このほかにも流体中の渦糸の運動方程式 [93] やスピンの歳差運動を描述する Landau-Lifshitz 方程式からも導くことができ [52]、物理的・工学的に最も重要なソリトン方程式の 1 つとされている。最近では、海洋工学でキラウエーブとして知られる Rogue 波 [94] の解析に NLS 方程式が用いられている。本論文で扱ったような NLS 方程式にしたがうパルス同士の相互作用に関する実験は、非線形光学の分野において光ソリトンを用いて行うことも可能であるが [95]、NLS 方程式という名称に反して、その対象とする物理系がこれまで全て古典系であったのに対し、本論文で扱った BE 凝縮の実現により、非線形波動研究に新しい応用分野が提供された。

参考文献

- [1] S. Bose: Zeitschrift fur Physik **26** (1924) 178
- [2] A. Einstein: Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. **3** (1925) 18
- [3] F. London: Nature **141** (1938) 3571
- [4] A. J. Leggett, *Quantum Liquids* (Oxford University Press, Oxford, 2006)
- [5] 山田 一雄, 大見 哲巨, 超流動, (培風館, 東京, 1995)
- [6] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Mathews, C. E. Wieman and E. A. Cornell: Science **269** (1995) 198
- [7] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3969
- [8] C. C. Bradley, C. A. Sackett and R. G. Hulet: Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 985
- [9] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari: Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 463
- [10] A. Griffin, D. Snoke and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [11] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003)
- [12] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008), 2nd ed.
- [13] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation* (World Scientific, Singapore, 2010)

- [14] S. Chu: Science **252** (1991) 861
- [15] C. Cohen-Tannoudji, *Atomic motion in laser light*, in J. Dalibard, J. M. Raimond and J. Zinn-Justin ed., *Fundamental Systems in Quantum Optics*, (North-Holland, Amsterdam, 1992)
- [16] W. D. Phillips, *Laser cooling, optical traps and optical molasses*, in J. Dalibard, J. M. Raimond and J. Zinn-Justin ed., *Fundamental Systems in Quantum Optics*, (North-Holland, Amsterdam, 1992)
- [17] Pierre Meystre, *Atom Optics* (Springer-Verlag, New York, 2001)
- [18] Alexander D. Cronin, Jörg Schmiedmayer and David E. Pritchard: Rev. Mod. Phys. **81** (2009) 1051.
- [19] M. R. Andrews, M. -O. Mewes, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle: Science **273** (1996) 84
- [20] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. -J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle: Science **275** (1997) 637
- [21] W. Hansel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch and J. Reichel: Nature **413** (2001) 498
- [22] Y. -J. Wang, D. Z. Anderson, V. M. Bright, E. A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R. A. Saravanan, S. T. Segal and S. Wu: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 090405
- [23] A. Abend, M. Gebbe, M. Gersemann, H. Ahlers, H. Müntinga, E. Giese, N. Gaaloul, C. Schubert, C. Lämmerzahl, W. Ertmer, W. P. Schleich and E. M. Rasel: Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 203003
- [24] H. Feshbach: Annals of Physics **19** (1962) 287
- [25] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn and W. Ketterle: Nature **392** (1998) 151
- [26] Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen and B. J. Verhaar: Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 69

- [27] 和達 三樹, 非線形波動, (岩波書店, 東京, 2000)
- [28] 戸田 盛和, 新版 非線形波動とソリトン, (日本評論社, 東京, 2000)
- [29] 谷内 俊弥, 西原 功修 非線形波動, (岩波書店, 東京, 1977)
- [30] 川原 琢治, ソリトンからカオスへ –非線形発展方程式の世界–, (朝倉書店, 東京, 1993)
- [31] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley, New York, 1974)
- [32] V. I. Karpman, *Nonlinear Waves in Dispersive Media* (Pergamon Press, Oxford, 1975)
- [33] E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (Cambridge University Press, New York, 1990)
- [34] M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011)
- [35] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott and R. G. Hulet: *Nature* **417** (2002) 150
- [36] U. Al Khawaja, H. T. C. Stoof, R. G. Hulet, K. E. Strecker and G. B. Partridge: *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 200404
- [37] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin and C. Salomon: *Science* **296** (2002) 1290
- [38] S.L. Cornish, S.T. Thompson and C.E. Wieman: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 170401
- [39] Jason H. V. Nguyen, De Luo and Randaal G. Hulet: *Science* **356** (2017) 422
- [40] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov and M. Lewenstein: *Phys. Rev. Lett.* **83(25)** (1999) 5198
- [41] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider and W. D. Phillips: *Science* **287** 97

- [42] J. Satsuma and N. Yajima: Prog. Theor. Phys. Suppl. **55** (1974) 284
- [43] T. P. Billam, A. L. Marchant, S. L. Cornish, S. A. Gardiner and N. G. Parker: *Bright solitary matter waves: formation, stability and interactions* in Boris Malomed ed., *Spontaneous Symmetry Breaking, Self-Trapping, and Josephson Oscillations*, (Springer, 2013), also arXiv:1209.0560 [cond-mat.quant-gas]
- [44] J. H. V. Nguyen, P. Dyke, D. Luo, B. A. Malomed and R. G. Hulet: Nat. Phys. **10** (2014) 918
- [45] Roberto B. Diener, Biao Wu, Mark G. Raizen and Quian Niu: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 070401
- [46] A. L. Marchant, T. P. Billam, M. M. H. Yu, A. Rakonjac, J. L. Helm, J. Polo, C. Weiss, S. A. Gardiner and S. L. Cornish: Phys. Rev. A **93** (2016) 021604(R)
- [47] G. L. Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory* (John Wiley, New York, 1980)
- [48] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981)
- [49] F. Calogero and A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons* (North Holland, Amsterdam, 1982)
- [50] S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons* (Plenum Press, New York, 1984)
- [51] A. C. Newell, *Solitons in Mathematical Physics* (SIAM, Philadelphia, 1985)
- [52] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1987)
- [53] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991)
- [54] T. Dauxois and M. Peyrand, *Physics of Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006)

- [55] T. Hyouguchi, S. Adachi and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 170404
- [56] L. Salasnich, A. Parola and L. Reatto: Phys. Rev. A **64** (2001) 023601
- [57] H. Sakaguchi and M. Tamura: J. Phys. Soc. Jpn **73** (2004) 504
- [58] H. Frauenkron and P. Grassberger: Phys. Rev. E **53** (1996) 2823
- [59] G. Theocharis, P. Schmelcher, P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskakis: Phys. Rev. A **74** (2006) 053614
- [60] G. Boffetta and A. R. Osborne: J. Comp. Phys. **102** (1992) 252
- [61] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62
- [62] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan: Am. Math. Soc. Trans. **1** (1955) 253
- [63] H. H. Chen and C. S. Liu: Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 693
- [64] R. Balakrishnan: Phys. Rev. A **32** (1985) 1145
- [65] N. Sasa and H. Yoshida: Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics **10** (2000) 119 [in Japanese]
- [66] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, Singapore, 1968)
- [67] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen and J. P. Gordon: Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1095
- [68] A. Gammal, T. Frederico and L. Tomio: Phys. Rev. A **64** (2001) 055602
- [69] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations* (AMS, New York, 2003)
- [70] A. Tovbis and M. A. Hoefer: Phys. Lett. A **375** (2010) 726
- [71] S. V. Manakov: Sov. Phys. JETP **38** (1974) 693
- [72] D. J. Kaup, J. El-Reedy and B. A. Malomed: Phys. Rev. E **50** (1994) 1635
- [73] E. Olmedilla: Physica D **25** (1987) 330
- [74] 久保 健一, 鹿取 謙二, スピンと偏極, (培風館, 東京, 1994)

- [75] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 125
- [76] D. J. Kaup and A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798
- [77] M. Wadati, K. Konno and Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Jpn. **46** (1979) 1698
- [78] T. P. Billam, S. L. Cornish and S. A. Gardiner: Phys. Rev. A **83** (2011) 041602
- [79] J. S. Russell: *Report on Waves, In: Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London* (1844) 311
- [80] D. Korteweg and G. de Vries: Phil. Mag. **5** (1895) 422
- [81] E. Fermi, S. Pasta and S. Ulam, *Studies of nonlinear problems I., In: Tech. rept. Los Alamos Report LA1940* (1955)
- [82] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 240
- [83] C. S. Gardner and G. K. Morikawa: Courant Inst. Math. Sci. Rept. NYO-9082 (1960) 1
- [84] B. B. カドムツェフ, 難波 忠清訳, プラズマ中の集団現象, (岩波書店, 東京, 1979)
- [85] T. H. Stix, *The Waves in Plasmas* (AIP, New York, 1992)
- [86] A. Hasegawa and F. Tappert: Appl. Phys. Lett. **23** (1973) 142, *ibid.* **23** (1973) 171
- [87] A. Hasegawa and M. Matsumoto, *Optical Solitons in Fibers* (Springer-Verlag, Berlin, 1989), 3rd ed.
- [88] A. Hasegawa Y. and Kodama, *Solitons in Optical Communications* (Oxford University Press, Oxford, 1995)
- [89] F. Kh. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1993)

- [90] G. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 2007), 4th ed.
- [91] Y. S. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, San Diego, 2003)
- [92] J. R. Taylor, *Optical Solitons: Theory and Experiment* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005)
- [93] H. Hashimoto: *J. Fluid Mech.* **148** (1984) 477
- [94] Nail Akhmediev, Adrian Ankiewicz and J. M. Soto-Crespo: *Phys. Rev. E* **80** (2009) 026601
- [95] George I. Stegeman and Mordechai Segev: *Science* **286** (1999) 1518