比例的推論の学習軌道に基づく授業実践の試み
－小学校第３学年における実践から－

日野　圭子，上野　友美，田島　達也，秋澤　克樹

宇都宮大学共同教育学部研究紀要　第72号　別刷

2022年３月

比例的推論の学習軌道に基づく授業実践の試み
−小学校第３学年における実践から−

DESIGNING LESSONS BASED ON LEARNING TRAJECTORY OF PROPORTIONAL REASONING IN THE THIRD GRADE OF PRIMARY SCHOOL

日野　圭子[†]，上野　友美[††]，田島　達也[†††]，秋澤　克樹[††††]
Hino Keiko, Ueno Yumi, Tajima Tatsuya, Akizawa Katsuki

概要 (Summary)

学習軌道とは，ある学習目標に向けて設計された一連の課題を通して推測される，子どもの思考や学習の道筋の記述である。本稿の目的は，比例的推論の学習軌道を参照して行った授業実践の過程を述べ，授業における児童の様子を考察することである。筆者らは３学級を対象に，児童の事前調査を行い，結果に基づいて，共通の学習課題を設定し，各学級で授業実践を行った。事前調査から，多くの児童には，問題に示された２量への着目が難しかったり，不安定であったりする様子が見られた。「長さ」及び「あまりのある割り算」の実践では，教科書に基づきつつ，１量でのユニット化やノルム化，更に，２量への着目が必要となる活用場面を設定し，課題や活動の工夫を行った。授業中の児童のワークシートへの記述や発話からは，児童の多様な思考方略が確認できた。それらを，学習軌道を参照しながら考察し，児童の思考の特徴と，授業を通して比例的推論を促す上での示唆を述べる。

キーワード：比例的推論，学習軌道，小学校下学年

1.　研究の目的と方法

数学教育において，比例的推論の発達モデルやそれに基づく指導の在り方の研究は長い歴史を持っている。近年は，発達モデルの構成において仮説改良の過程（Maloney et al., 2014）が重視されているが，教師の日々の授業改善を通して，その発達をいかに促すかという実践ベースの研究は，十分とは言えない。日野・加藤・市川（2020, 2021a）は，この課題に対して，小学校下学年において，子ども達の比例的推論の進展の基礎を形成するような授業について探究を行っている。本研究は，この研究プロジェクトの一環として，小学校第３学年における授業実践を行い，児童の比例的推論に関する現状を捉えるとともに，比例的推論を促進する上での示唆を得ることを目的としている。

以下では，まず，本研究が参照する比例的推論の学習軌道について述べる。次に，本研究が対象としている小学校第３学年の３学級の児童に対して行った，2021年度当初における比例的推論の調査結果を簡単に報告する。続いて，筆者らが５月～８月にかけて計画・実施した２つの授業実践の概要と，

† 宇都宮大学大学院教育学研究科(連絡先：khino@cc.utsunomiya-u.ac.jp)
†† 栃木県下野市立祇園小学校教諭
††† 埼玉県熊谷市立星宮小学校教諭
†††† 宇都宮大学共同教育学部附属小学校教諭

そこでの児童の様子の一部を報告する。実践は，「長さ」および「あまりのある割り算」の単元の活用問題において，比例的推論の進展を促すという視点から教材を考えて行った。

2. 比例的推論の学習軌道の提案

筆者らは，授業の実践を行うに当たって，比例的推論の学習軌道（日野他，2021a，2021b）を参考にしている。学習軌道（learning trajectory）とは，ある学習目標に向けて設計された一連の課題を通して推測される，子どもの思考や学習の道筋の記述である。

日野他（2021a，2021b）では，子ども達の発達の状況に寄り添った授業のデザインを目指し，小学校下学年において，比例的推論の基礎を形成する授業をつくる上で参照できる子どもの比例的推論の学習軌道の提案を行った。そこでは，Vergnaud (1994) による２つの比のタイプの区別を参照し，それぞれについて発達の段階を考えた。

１つはscalar ratiosであり，一方が〇倍になると他方も〇倍になるという，比例する２量の共変関係における比 (無名数) が対象である。以下では，文言を一部修正した日野他 (2021b) の学習軌道S1 ~ S5を挙げる。S1 ~ S3はResnick & Singer (1993) による「前比的な推論」，S4，S5は「比の推論」に関わると考えている。

S1：1つの量に着目する：1つの量について，大きさの関係を捉える。ユニットを決め，それを用いて，比べる大きさをノルム化する。

S2：2つの量に着目する：1つではなく2つの量が視野に入り，両方が関わっていることに注意を向ける。

S3：2つの量の間を局所的に調整する：限定された範囲内に留まったり，間違いを含んだりしながらも，2つの量が伴って変わるというイメージを持ち始める。

S4：2つの量の間に対応を付ける：2つの量が伴って変わることを使って，問題解決をする。数えたり，加法的関係を使ったりすることが主流であり，局所的に乗法的な関係に着目し，使っていく。

S5：2つの量の間に乗法的関係による対応を付ける：2つの量が伴って変わることを使って，問題解決をする。2量の間の乗法的関係に着目し，積極的に，また，意識して，その関係を使っていく。

他の１つはfunctional ratesであり，比例する２量の対応関係 (関数関係) をy=axと表したときの比例定数a (２量の比率を意味する) を指している。ここでは，伴って変わる２量に対して，対応する数値同士の関係についての理解が進んでいくと考え，以下のような段階を提案した。馴染みのある場面や簡単な数値に関して，「pあたりq」という比率や「倍」についての意識が芽生え，それらが成熟していく過程を考えている。

F1：限定的に対を考える：伴って変わる２量xとyについて，限定的ではあるが，xとyが対になっていることに注意を向ける。

F2：より一般的に対応づける：伴って変わる２量xとyについて，「xが同じならyは同じ」「xが定まればyが定まる」等，対応関係への着目がなされ，xとyを関係づける数として，定数aがあることに気づく。

F3：構造を捉える：伴って変わる２量xとyについて，a×x=yやx×a=yという構造を捉える。

上記のSとFの関係の考察は今後の課題であるが，一方の比のタイプを扱う力が高まることが他方のタイプを扱う力を前進させるといった相乗的な関係を持ちながら，比例的推論が進展していくのではないかという推測を持っている。

3. 年度当初の児童の比例的推論の様子

2021年4月下旬から5月上旬において，栃木県内の2校（公立小と大学附属小）および埼玉県内の1校（公立小）で，児童の比例的推論の実態を把握するために筆記調査を行った。調査で扱った問題（卵の問題とカルピスの問題）は，加藤・寺井（2021）による作成基準に基づいている。卵では，個数と値段について，カルピスでは，液と水のカップ数について問いかけた。どちらも比例する2量についての欠損値問題であり，数値を段階的に変えることで，児童の推論の実態を掴むことをねらった。数値を変えるに当たっては，表1の基準によっている。

表1：「数値」による問題の分類（加藤・寺井，2021，p. 80）

タイプ①	1あたりが示されている問題
タイプ②ア	1あたりを示しておらず，1あたりが整数値で求められ，1とみる大きさが明示されている問題（例　4mが200円のリボン，12mではいくらですか．）
タイプ②イ	1あたりを示しておらず，1あたりが整数値で求められず，1とみる大きさが明示されている問題（例　4mが300円のリボン，12mではいくらですか．）
タイプ③ア	1あたりを示しておらず，1あたりが整数値で求められ，1とみる大きさも明示されていない問題（例　4mが200円のリボン，10mではいくらですか．）
タイプ③イ	1あたりを示しておらず，1あたりが整数値で求められず，1とみる大きさも明示されていない問題（例　4mが300円のリボン，10mではいくらですか．）

図1は，卵とカルピスそれぞれの問題での挿絵，および，第1問～第5問で扱われた数値を示している。挿絵はすべての問題で同様のものを付けた。

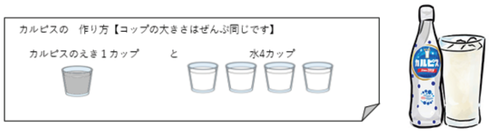
＜卵の問題＞	＜カルピスの問題＞
	
タイプ① (1) 卵1個：値段5円→卵7個：値段？円 問題「お店でたまごを売っています．1こ5円です．たまごを7こ買おうと思います．代金はいくらですか．」	タイプ① (1) 液1カップ：水4カップ→液3カップ：水？カップ 問題「ミッキーはカルピスのえきと水をまぜあわせてカルピスジュースをつくることにしました。（液1カップと水4カップ）ミッキーのカルピスとちょうど同じ「こさ」になるようにカルピスを作ります。カルピスのえきが3カップだと，水は何カップいりますか。」
タイプ②ア (2) 卵6個：値段30円→卵18個：値段？円	タイプ②ア (2) 液3カップ：水3カップ→液12：水？カップ (3) 液2カップ：水8カップ→液6カップ：水？カップ
タイプ③ア (3) 卵6個：値段30円→卵10個：値段？円	タイプ③ア (4) 液4カップ：水8カップ→液2カップ：水？カップ (5) 液4カップ：水8カップ→液6カップ：水？カップ
タイプ②イ (4) 卵8個：値段60円→卵72個：値段？円	
タイプ③イ (5) 卵8個：値段60円→卵20個：値段？円	

図1：卵とカルピスの問題の挿絵と数値

以下では，本稿で実践を行っていく３学級の児童（合計67名）についての結果を簡単に報告する。２名欠席のため，実際には65名の結果となる。表２は，数値のタイプ別に整理した，各問題での正答率を示している。

表２：卵とカルピスの問題の正答率 (N=65)

	卵	カルピス
タイプ①	（1） 95%	（1） 65%
タイプ②ア	（2） 38%	（2） 65% （3） 29%
タイプ③ア	（3） 28%	（4） 48% （5） 38%
タイプ②イ	（4）25%	
タイプ③イ	（5） 8%	

表２からは，卵の問題では，「1個５円」という１あたりが示されたタイプ①の卵の問題の正答率は95%とかなり高いが，タイプ②やタイプ③では正答率は低く，タイプ③イでは8%という結果となった。卵の問題におけるタイプ②イとタイプ③イの正答率の低さが既に報告された（加藤・寺井，2021）ため，カルピスの問題では，それらのタイプの問題を除いて問いを構成した。タイプ①として「液１カップと水４カップ」のように１あたりを示したが，正答率は65%であり，卵のようには高くはなかった。タイプ②アでは２問を提示した。「液３カップ：水３カップ→液12：水？カップ」は，液と水が同カップ数であり，正答率は65%であった。「液２カップ:水８カップ→液６カップ:水？カップ」は29%であった。タイプ③アでは，「液４カップ：水８カップ」に対して「液２カップ」および「液６カップ」のときの水のカップ数を問いかけた。どちらも正答率は卵より高くなった。「半分」の関係を取り入れ，最初の問いの答を使って次の答が求められる配列にしたことも影響したと考える。

加藤･寺井 (2021) は，卵の問題に対する児童の思考方略の分析から，12の思考方略群を見いだし，それらをもとに，児童の一連の問題に対する解決の傾向として４つの特徴を分類している。そのうち，以下の３つは，児童の学習軌道の段階に関わる (括弧内) と考えられる。

・特徴１：２量を伴って変化させる前段階の思考方略群であり，問題の理解が不十分であったり，数値を組み合わせたりしている，あるいは，１量のみに着目している (S1)。

・特徴２：２量を伴って変化させる思考方略を用いる（S2，S3）が，問題によっては，数値の組み合わせで答を求めたり，問題の意味が変わったり，１量のみの着目が行われたりしている (S1)。

・特徴３：２量を伴って変化させる思考方略を用いており (S3，S4，S5)，数値の組み合わせや１量のみの着目は見られない。

これらの特徴が，年度当初の児童にはどの程度見られるだろうか。手がかりを得るために，卵の問題について，問い毎に個々の児童の思考方略を同定し，それらを並べてどのような特徴が見られるかを評価した。評価は日野が行った。図２は，65名の児童について，どの特徴が見られるかを集計したものである。なお，「混合」型は，多様な思考方略が見られ，特定の特徴として分類することが難しい場合を指している。

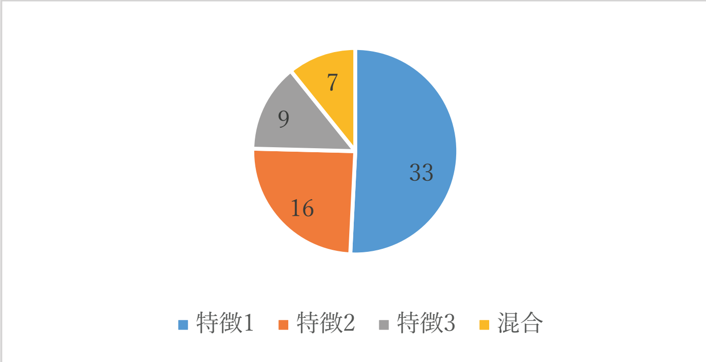


図２：卵の問題で各特徴が見られる児童の割合（円グラフ中の数値は人数を示す）

図２からは，約半数の児童（51%）に特徴１が，約４分の１の児童（25%）に特徴２が見られることが分かる。特徴１の児童には，あまり試行錯誤は見られず，同じ方略を一貫して使っていた。特徴２の児童は，２量の関係に目が向き，両者を調整させていくが，数値の関係が複雑になると，数値の組み合わせや１量のみの着目になってしまっていた。特徴３は９名（14%）の児童に見られた。特徴３の児童は，特徴２と違い，数値の関係が複雑になっても，数値の組み合わせや１量のみの着目にはならず，何とか調整をしていこうとしていた。ここでは２つの思考方略の傾向があった。問題で与えられた比（組み立てユニット）をそのまま使っていく傾向がある場合（４名）と，新たな組み立てユニットを作り出し，それを使っていく傾向がある場合（５名）である。後者の児童は正答率も高かった。混合型の児童は，素朴な方略を含めて試行錯誤を続けていた。

4.　授業の計画

筆者らは，年度当初の児童の実態を念頭に，第３学年の算数の授業において，年間を通して，何度か授業づくりを共同で行い，授業での児童の様子を共有したり，各自の指導を振り返ったりする機会を持つことを計画した。実践は現在も続いている状況であるが，ここでは，５月～８月に行った２つの授業実践について，何をねらい，どのような課題や手立てを考案したかを述べる。

(1) 授業の意図

計画した授業は,「長さ」及び「余りのある割り算」の単元の活用場面での授業である。第３学年の「長さ」の単元では，長い長さを測定したり表したりすることを扱う。そして，キロメートルの単位や測定の意味を理解し，それらを活用して適切に長さを表したり，適切な単位や計器（巻き尺を含む）を選択して測定したりする力を養う。また，ものの特徴や単位に着目し，測定の方法や単位同士の関係について説明したり，統合的に考察したりする力の育成も目指している（文部科学省，2018）。

筆者らは，単元末の活用場面で扱われる「学校の廊下の長さを測る」という活動に注目した。この活動の主たるねらいは，およその長さの見当をつけ，学んできた巻き尺を使って実測を行い，測定の仕方について振り返ったり，量の大きさを実感したりすることである。その一方で，廊下の長さは，巻き尺ではなくても，自分で単位を決めて，そのいくつ分であるかを考え，計算して求めることもできる。例えば，歩幅，体長，教室の数，窓の数などである。すなわち，課題や場面を工夫することで，学習軌道のS1の段階での児童の理解を深めたり，S2に向けて準備をしたりすることができるのではないかと考えた。

一方「余りのある割り算」の単元では，割り切れない場合の除法や余りについて理解し，活用ができるようにする。その際には，問題場面における数量の関係に着目し，具体物や図，式を用いて関係を表したり，計算の仕方を考えたりする力も養う。解決の過程や得られた結果について吟味し，数理的な処理のよさに気付くことも大切な目標である（文部科学省，2018）。ここでは，単元末の活用場面の1つとして教科書の練習問題にある「タイヤの数と車の台数」に注目した。練習問題では，おもちゃの車を作る場面において，車１台に４個のタイヤが使われることから，30個のタイヤでは何台の車が作れるかを問うている。ここでは，タイヤの数という１つの量について，４個をユニットとしてノルム化する（測る）活動が行われる。筆者らは，タイヤの他に箱を登場させ，タイヤ４個と箱２個で１台の車を作る場面を考案した。タイヤ４個に対して箱２個という２量の関係を，児童がどう認識し，調整していくか（S2）を見ていくことにした。

(2) 授業の日時や経過

表３は，授業実践日と児童数等の情報を示している。授業実践の順序や日時は，それぞれの学級の進度や学校の事情から異なった。授業実践では，授業のビデオ撮影や児童のノートやプリントの収集を行った。これらの実践に当たって，筆者らは何度かオンラインの形で集まり，アイデアを練ったり，持ち寄った指導案を検討し合ったりした。更に，個々に作成した指導案や実践記録を交流し，授業を振り返る機会を持った。従って，先に行われた授業での児童の反応を知って，その後の授業実践を行うということが見られた。なお，授業実践の前に，児童の当該内容に関わる知識や考えを知るために，簡単な事前調査を行うことがあった。

表３：行われた授業実践について

実践名	授業実践日	学級および児童数
学校の廊下の長さを測る	6月23日	A校・ア学級：34名
	6月25日	A校・ア学級：34名
	6月25日	A校・イ学級：34名
	6月25日	B校・ア学級：28名
	6月29日	B校・イ学級：29名
	7月13日	C校・ア学級：5名
車を作ろう	6月28日	C校・ア学級：5名
	7月15日	B校・ア学級：28名
	8月30日	A校・ア学級：34名

最初の実践「学校の廊下の長さを測る」は，同一校の複数の学級で行われた。学級による児童の反応の違いを比べたり，最初の実践で見えた課題を次の実践で修正したりすることも行われた。続く「車を作る」実践は，各校の１学級の児童に対して実践が行われた。

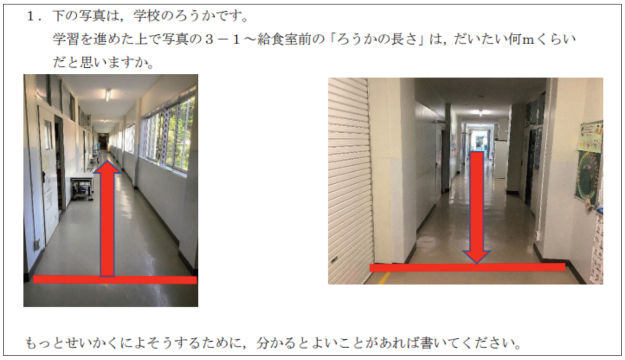
(3) 課題や手立ての概要

「学校の廊下の長さを測る」では，計画の段階で，課題や授業の流れについてアイデアを持ち寄り，意見交換を行った。それぞれの教師の意図や考えに違う部分もあったため，同一の指導案では行わず，各自の計画で行うこととなった。「車を作ろう」は，同一の課題を用いて行った。図3は，授業で提示された課題である。

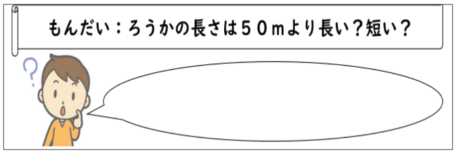
次章では，A校ア学級，B校ア学級，C校ア学級で行った授業実践について述べていく。授業実践は，本稿の著者である秋澤，上野，田島が行った。秋澤と田島は，実践を行った学級を担任していた。

「廊下の長さを測る」

＜A校＞



＜B校（C校も同様の課題）＞



「車を作る」

タイヤを４こと，箱２こを使っておもちゃの車を作ります。タイヤは３０こあります。
できるだけ多く車を作るには箱はいくつひつようで,車は何台できますか。

図３：授業で提示された課題

5.　授業の実施

(1) A校ア学級での授業実践

①　学校の廊下の長さを測る

長さの学習前に，校舎の廊下の長さ（実際は61m）の予想と理由を聞いた。児童の予想は6m ～ 97mにわたった。理由も多様であり，無回答の児童もいたが，感覚や経験による予想をする児童（11名），歩数に着目する児童（3名），教室の幅と個数等を乗法や加法で求める児童（7名）が見られた。

長さの学習の終盤で課題（図3のA校を参照）を与えた。図4は，校舎内の廊下の位置を示している。廊下には，窓，教室，蛍光灯，柱，天井の板等，規則的に並んでいるものがあるため，様々な基準を用いて，基準の長さ×個数でおおよその廊下の長さが求められるのではないかと考えて設定した。なお，児童は，事前に教室が8mであることや，10mで何歩かということを確かめている。

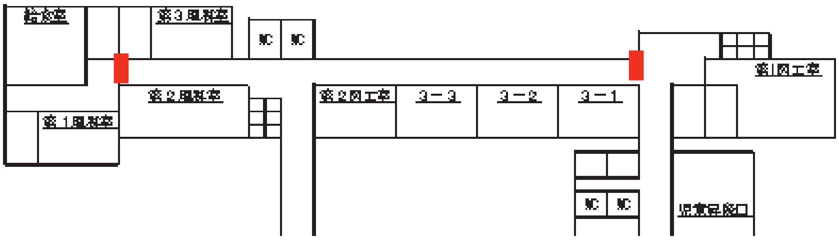


図4：廊下の位置

児童がグループで考えた後，全体で交流した。多くのグループが，足の長さを使って求めようとしていたため，もう少し大きな単位に着目できないかと，30㎝ものさしを使うことを教師が提案した。すると，手を広げると身長と同じになる

という考えが出され，歩数や身長の幾つ分か，1歩を1mで歩くにはどうするかといった体を使った測定に児童の注意が集中した。基準となるものの長さを測る必要性が出てきたため，実際に測ってみることを認め，実測をした。教師は基準とする具体物の長さを測るという思いであったが，児童は廊下をメジャーを使ったり，1mものさしを何本も並べて測ったりしており，基準となるものの幾つ分という発想には至っていない様子がうかがえた。

第2時では，基準とする長さ×個数で求められることに児童の注意を向けるため，前時で基準として何を測ったかを振り返り，全体で共有した。上履き，歩数，体の長さという基準の他に，教室の幅を基準にしたグループがあった。3学級分は教室の幅が同じであり，図工室も同じ幅であるが，理科室は違うという。児童からは，「理科室とトイレが分かればできる」「この2つは長さが違うので後で測る」といった意見が出された。その後，計算で求めることを促すため，5分間の時間制限を設けて再度実測させた。各グループの最終的な結果を比較検討し，最後に教師が61mが実際の長さであることを提示して，授業が終了した。

児童は，上履きの長さ×歩数，腕を広げた長さ×いくつ分を計算したり，寝転がるというアイデアで求めたりしており，長い長さを測定するために体を使っていた。教室にあまり目が向かなかったのは，幅の違う理科室なども含まれる長さにしたためと考えられる。また，児童においては，見通しを持つよりは正確な長さを求めることが問題となっていた。規則的に並んでいる電灯などがある天井に目を向けた児童はいなかった。教室のアイデアを出したり，それで考えたりしたのは特徴2の児童が多かった。また，授業では取り上げられなかったが，「何秒かかるかを測る」とワークシートに書いた児童(特徴3)がいた。この児童は歩く速さを考えているようであった。

② 車を作ろう

本時は，あまりのあるわり算の学習が終わった際に設定した。まず，前時の問題を使って復習を行い，割り算の学習が関係することを確認し，その後，車の問題に入った。課題(図3を参照)を提示し，個別解決の時間を取った。以下は，児童のワークシートから主な考えを分類したものである。

・(12人) 31÷4＝7…3であることから，車が7台できることを導く。その後車は2箱使うので7×2＝14箱必要という計算をする。
・(6人)上の様相に加えて図もかいている。
・(5人) 31÷4＝7…3　7台作れるが，1台2箱使うので7＋7＝14箱使用するという加法を使っている。
・(1人) 31÷4＝7…3　1台2箱使い，それが7台分なので2×7＝14箱使用する。
・(2人)式はなく，図を使って個数を導いている。
・(1人)割るのではなく，積を使って求めている(4×7＝28　2×7＝14)。

全体で，式や図を使った解法を数名に発表してもらった。そして，7台作れて，1台につき2個の箱を使用するため，7×2＝14箱，7＋7＝14箱である点を共有した。

次に，次にタイヤが3個の場合について考えた。殆どの児童は，タイヤが4個の場合に使った方法を継続して使って，解決をしている様子であった。更に図5を示して，タイヤを8個使うとするとどうなるかと問いかけた。教師は「31÷8＝3…8　3台できる。箱は2個×3台分＝6個」を想定していたが，「分からない」という反応が急に多くなった。また，箱が6個で3台分なので18個という考えが出された。タイヤ8個に対して


図5：タイヤ8個の図

箱が6個の図を示したため，箱を2個使うという前提が崩れてしまった。ここでは，1台に対して何個の箱を使うのかが問題となったと言えるが，そこについては議論がなされずに，時間切れとなった。

タイヤが4個については多くの児童は図も書いていた。しかし，徐々に式だけになっていった。また，箱の総数を求めるためにかかれた式の殆どは，7×2であり，2×7ではなかった（全体では7×2が共有された）。タイヤの数から車の台数を求めるため，まず台数が分かることになる。その7台に2つずつ箱が必要という考えから，7×2という式がかかれたのかもしれない。事前調査で分析した3つの特徴との関係から見ていくと，継続して図から答を導いていた児童は，特徴3や混合タイプの児童であった。教師によると，日頃から図や絵をかいて考えることが好きな児童であると言う。図6左にみるように，特徴3の児童は，「2倍」という言葉も使っている。一方，7+7や10+10の加法の式をかいた児童，また，車の台数を求めて終わっていた児童（図6の右）は，全員が特徴1に属する児童であった。

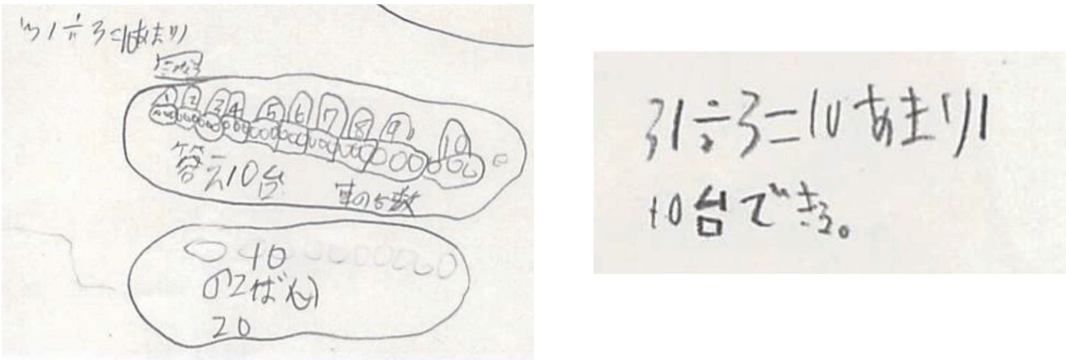


図6：2名の児童のワークシート（1台にタイヤ3個の場合）

(2) B校ア学級での授業実践

①学校の廊下の長さを測る

「廊下の長さは，50mより長い？短い？」という課題を設定し，長い巻き尺を使わずに長さを求めよう，と投げかけた。ここで扱う廊下は，教室4つ分の長さである。

事前に，本時で扱う廊下の長さについて，だいたい何mくらいだと思うか，調査を行った。実際の長さは32mであるが，調査では，5mから50mの間の回答が見られた。なぜ，そのように予想したかについては，「1つの部屋が8mだったから32m」「教室の横の長さが10mくらいだったから4教室で10×4＝40」といった前出の学習軌道S1の様相を5名の児童の記述から捉えることができた。これらの児童は，これまでに経験した測定活動を思い出しながら，あるユニットのいくつ分と考えていた。また，1mをマスという自分なりのユニットで構成するものの，「だいたい4マス（教室の床のマス）が1mだから50m」「1mが（マス）3個半だから14m」など，1mのいくつ分なのかについての記述がない児童も多く見られた。

授業では，実際に測定する前に，どのように廊下の長さを求めるか，アイデアを出し合った。前述の通り，教師が「長い巻き尺を使わずに」と話したため，最初に出てきたのは，「歩いてみる」という考えであった。その他，事前調査で見られたように，1mという単位も出された。その後，マスいくつ分かで測る，と単位だけでなくいくつ分についてまで言及する児童が現れた。最終的に以下5つの

方略が児童から提案され，教師は，単位については，「もと」という言葉を使って板書した。

ア）ぼくの一歩　〇歩分

イ）1m　〇つぶん

ウ）マス目の１つ分の長さをはかってそのいくつ分か

エ）マス〇つ分で1mになるのではないか

オ）給食の配膳台の長さを測って，動かしながら調べる

測定活動は，個人での活動としたが，同じアイデアの友達同士で協力して活動する姿も見られた。方略オについては，実際に試す児童はいなかった。

調べた結果の発表では，主に以下の３つの方略が出された。

カ）マス（30ｃｍ）×106（こ）＝3180ｃｍ

キ）教室の縦の長さ（819ｃｍ）×４（こ）＝31ｍ92ｃｍ

ク）1mものさし×34（こ）＝34ｍ

思考方略キに取り組んだ一人の児童は，１つの教室の縦の長さだけを測り，その４つ分と考えて後は計算で求めた。この児童は，特徴２の児童である。なお，未習の計算については，計算機を使ってもよいこととした。教師は，「できるだけ短い時間で」と声掛けをしたものの，他の児童は皆，指定した廊下すべての長さを測っていた。比例的推論を進展させるためには，「全ての長さを測らずに求めよう」等，教室一つ分の長さに注意を向けさせるための言葉かけが必要であったかもしれない。また，多くの児童が目をつけたマス１つ分の長さは30cmであったことから，「マス３つで1mとする」など，課題に照らして，大体の長さが分かればよい，ということを強調してもよかったのではないかと考える。

②　車を作ろう

本実践では，図を見せながら課題（図３を参照）を提示し，児童に，あまりに注目して答えを考え，説明するよう話した。導入では，本単元でのこれまでの学習を振り返ったり（図7），問題文から，どんなことを考えたかを話し合ったりした。その際，「式が２つになるのではないか」「あまりがでるのではないか」「かけ算も使うのではないか」といった意見が出され，見通しを持ってから自力解決に取り組んだ。

全体での練り上げの場面で，図８のような記述をしていたC1は，教師に指名され，前に出て黒板にも同様にかいた。その後，友達のかいた図からその思考を推測し合う活動を取り入れた。C1と似た図をかいていたC2（図9）にC1の考えについて尋ねると，「タイヤと箱を一緒に計算した」と話した。C2は，〇を４つかいて大きく囲み，その下に２と書いて次に進むという方法で解決したため，このような発言となったと推察する。一方C1は，〇を30個かいてから，４個の〇の上に２個ずつ□をかいたとのことであり，図のかき方に違いが見られた。C1は，自分のかいた図から答を導き出し，C2は，図をかいた後，立式に至った。なお，C1とC2は年度当初に特徴２が見られた児童である。

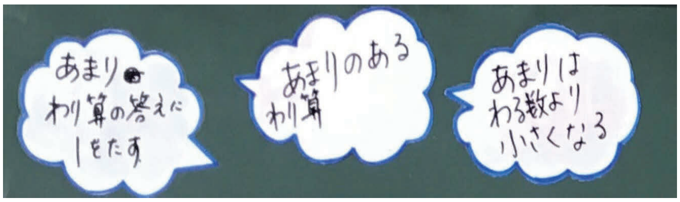


図７：学習の振り返りで使われた吹き出し

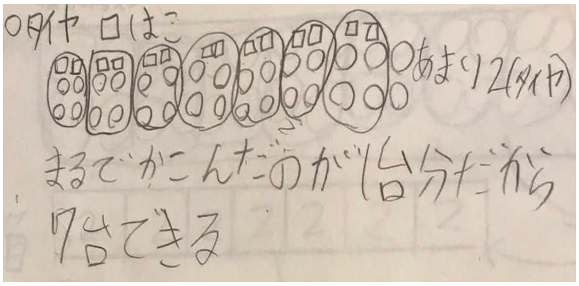


図8：C1のワークシート

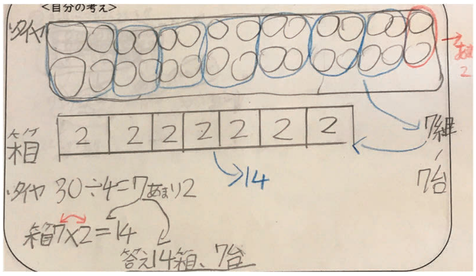


図9：C2のワークシート

T：それでは，C1の考えは，これで正解でいいですか？
C3：車が何台できるかしか書いていない。
T：何が足りないの？
C3：箱の数が足りない。
T：箱がいくつ必要で，がなかったんだ。じゃ，箱はどうしたらいいのかな？
C4：1台に箱が2つ必要だから，車の数，7台かける2箱で14個になって，箱は14個必要。
T：何か言いたいことがある人どうぞ。付け足しとか。質問とか。
C5：2,4,6,8,10で数えたら14個だった。
C3：C4と似ているんですけど，タイヤが4個のまとまりにつき箱が2個だから，2×7＝14
（途中省略）
T：じゃ，台数は式にするとどうなる？
C6：式書こうとしたけど，どうするか迷った。30が7個で…30のまとまりで…4個に分けて…
T：30を4個に分けてって言ってくれたね。いいヒントかも。
C7：30わる4をして…30÷4=7であまり2。
T：こうすると，C1の図とぴったり合うね。

その後，余ったタイヤ2個の処理について議論が及んだが，再度，C1の板書をもとに，議論が行われた。C3は，C1が2量に目を向けたものの，最終的には，1量についてしか答えていないことを指摘した。上で示すやりとりから，C5のように，2つの量の間に対応をつけても，乗法的関係による対応を付けることは難しく，「2とび」で数えるなどして問題を解決している児童がいることが分かる。一方，C3のように，2つの量の間に乗法的関係による対応を付けることができる児童がいることも分かった。年度当初の調査結果を見ると，C3とC5はどちらもは，卵の問題では「1量」にしか注意が向けられていない（特徴1）。また，カルピスの問題でも数値を組み合わせていたり，無回答であったりしていた。従って，この授業では，2量の関係について考察しているというところに，児童の進歩を見ることができる。

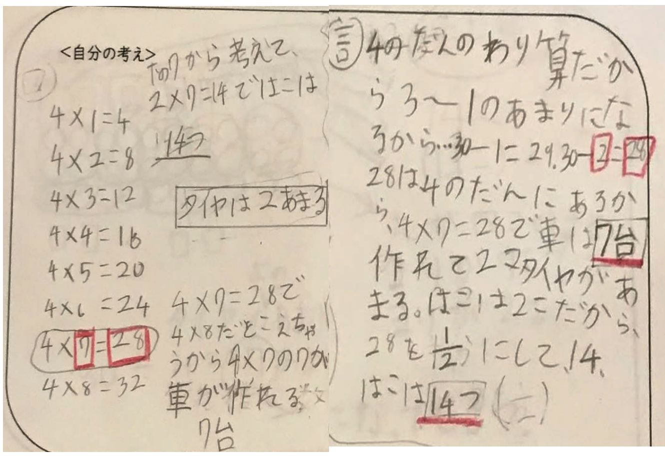


図10：C8のワークシート

また，授業中には扱えなかったが，授業後，車一台に必要なタイヤと箱の数の関係に着目して問題

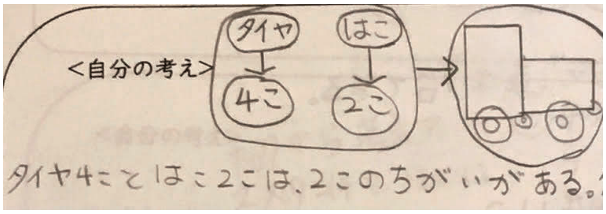


図11：C9のワークシート

を解決する思考方略を用いたと考えられる児童（C8）がいたことが，ワークシートの記述（図10）から分かった。C8は，「はこは2こだから28を1/2にして14」と書いている。「タイヤは4個」という記述はないものの，箱の数はタイヤの数の1/2であることを見出して問題を解決するという進んだ考えを持っていたと推察する。C8は，年度当初の調査で全問正解で特徴3と考えられる児童である。C9は，C8同様に，タイヤと箱の数の関係に着目したものの，差で捉えている（図11）。この児童は，年度当初の調査でも，差による捉えが見られた。授業で用いる課題やそこで扱う数値を工夫することによって，育てたい思考方略に迫る指導ができる可能性が高まると言えよう。

(3) C校ア学級での授業実践

①　学校の廊下の長さを測る

授業導入では，今までの学習で測ってきたものを振り返った。以下のやりとりが示すように，本時までの授業で，教室内の長さについて，床のマスの大きさなどに着目して大きさの関係を捉えられていることが分かる。本時は，さらに長いもの（廊下）を測ることを確認し，児童は廊下の長さの見当をつけていった。そこでの児童の様子も，以下のやりとりで示している。C4は，窓と柱に着目して長さの見当をつけようとしたが，表現することができなかった。C1は，廊下の長さを他の長さに着目して考察することができなかった。年度当初の事前調査では，C1 ～ C4には特徴1，C5には特徴2の様子が見られた。

T　：今まで，授業の中でどんなものをはかりましたか？
C　：廊下のまど。
C 2：90cm。
C 5：じゃあ先生，このマスが3つ分だね。
C 2：30cmだから30と30と30で90だから。
T　：マス1こ30cmが3こぶん。他は？
C 5：黒板の横。
T　：どのくらいだったけ？
C　：3m5cm ？
T　：はかってみようか。いくつ？
C 5：3m49cm。
T　：他は？
C 1：あの柱。
C 2：60cm。
C 1：すぐわかった。あのマスが2つで60cmだから。
C　：三二が六。
T　：あとは？
C　：床。
T　：床というか教室の縦。
C　：教室の縦。（ノートを振り返り8m）
T　：8mか。
C　：横は7m。

【廊下が教室の３個分だと着目して考察していたC2とC5の発表】
C ２：教室が8mだから８×３で24m。
T　：これ言っていること分かる。
C ５：あのね。何でここが3になったかというと。まず最初に，１年生，３・４年生，少人数。これ一つが8mだから。これが１こと２こと３こで８×３＝24。
【自分の足から首を1mとして計測したC3の発表】
C ３：わたしの首から足までが1mなんですよ。はかってみたら29mなんですよ。でもあまりがあって青い線からはみ出た。28mあって，14cmだった。
T　：28mはどうやったの？
C ３：ここからここまでが1mでそれが28こあった。

この後，C4の窓と柱に着目した考えを全員で見て行った。廊下には，４つのガラスでできた窓（1つの窓の幅は3m70cm）が６つと柱（1つの柱の幅は60cm）が７つあるため，計算すると26m40cmになることを確認した。最後に，廊下の実際の長さが27mであることを教師が伝えて授業を終えた。

②　**車を作る**

問題（表３を参照）を黒板に板書すると，「問題が長い！」という声が児童たちから挙がっていた。また問題の理解を促すために教師から，出来上がったおもちゃの車の絵も示された。「思っていたのと違う」という声が聞こえ，児童からはタイヤが４個でなく３個ではどうかという声，別の授業で使っているmbot（タイヤが５個）ではどうかという声が上がった。

その後，個別解決の時間を取り，ある程度解決が出来た段階で，友人と解法を共有したり教え合ったりする時間を設けた。５名の児童のノートからは自力解決の様子を見ることができる。

C1は，タイヤと台数の関係（30÷４＝７あまり２）を図と式で表すことができている（図12）。しかし，そこで留まり，台数と箱の関係に着目することができずにいる。2つの量が視野に入らず，両方が関わっていることに注意を向けられていない状態である。

C2は，タイヤと台数の関係（30÷４＝７あまり２），台数と箱の関係（２×９＝18あまり０）を記述している（図13）。しかし，台数と箱の関係を正しく表すことができていない。2つの量が視野に入っているが，両方が関わっていることに注意を向け表現することができていない。

C3，C4，C5は，タイヤの数と台数，台数と箱の関係について記述している（図14）。２量に着目して問題を解決できている。２つの量が視野に入り，両方が関わっていることに注意を向けることができている。

C3は友達と解法を共有する間に，絵を完成させた。C3とC4は，自力解決の段階では，箱の数を図に表すに留まっている。C5は，５名の児童の中で唯一乗法の式を用いて箱の数を求めたが，７×２＝14という式を書いた。ノートにはC5による式の意味が記述されている。

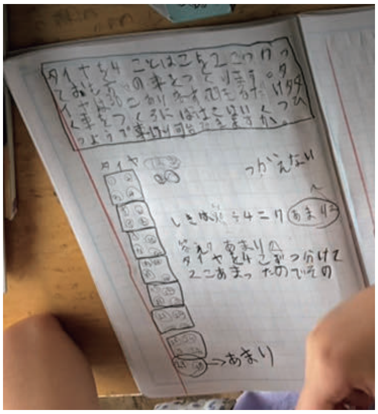


図12：C1の記述

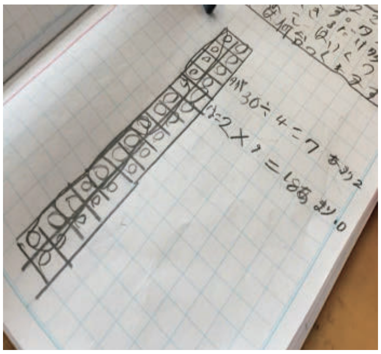


図13：C2の記述

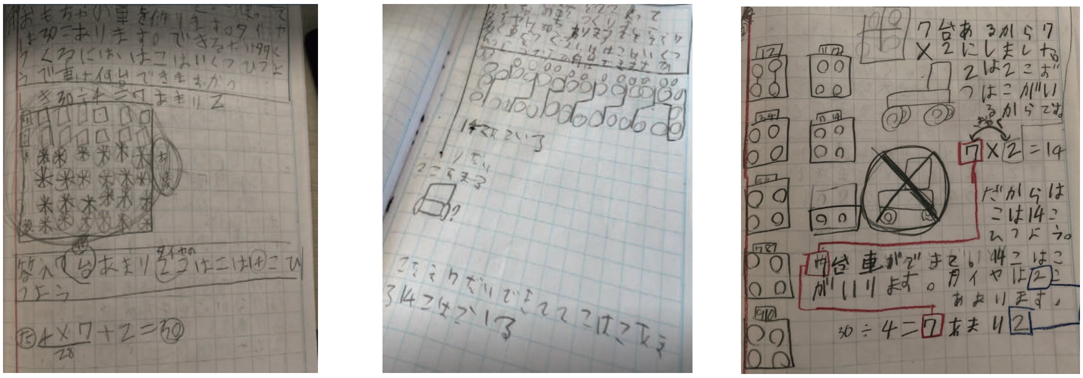


図14：C3（左），C4（中央），C5（右）の記述

その後，一斉で解法の共有や比較を行った。C1が４個ずつのタイヤの図を修正しながら描いた。そして，30÷４＝７あまり２となること，車は８台ではなく７台となることを確認した。教師から，「まだ終わってないよねお話。」という声かけがなされ，箱がいくつ必要かが問題となった。C2が２×９＝18とかいたが，９が何であるかを答えることができない。C5が，図が違うのではないかと発言し，前に出ると，２×７＝14に直し，「それはね。まず，２は２こずつ。この箱は２こずつ必要で，この７は，この7。あっそれで，答えは14。」のように説明をした。C5ははっきりと7が車の台数であることを言っていない。また，C5は２×７ではなく７×２の式を書いていたが，その点については問題にされなかった。教師が，箱を２個ずつ図に書き加え，７が台数であることを説明し，式と答えを確認していった。

その後，教師は，導入時の児童の声に戻り，タイヤの数が３個と５個の場合について問いかけていった。児童とのやりとりからは，C5が会話をリードしている様子が見える。C5は，１台に使うタイヤの個数が変わっても，タイヤの個数と車の台数と箱の個数の関係について注意を向け考察を続けることができている。しかし，他の児童は，１台に使うタイヤの個数が変わると，タイヤの個数と台数と箱の個数の関係がイメージできていない様子であった。その中で，C2は，授業を通して徐々にこれらの関係をイメージできるようになった。下のやりとり（下線部）が示すように，C2はタイヤが３個のときは，初めは箱が５個必要であると答えているが，途中で「20こ！２こ必要だからそれが10だから。それでかけ算」と発言している。タイヤ４個のときには難しかった「何台の車が作れるか」を，そこでは正しく捉えている。その後のタイヤ５個やタイヤ８個と箱６個使う車についても，タイヤの数から見出した台数と１台当たりの箱の数の関係を使って，箱の全体の数をかけ算で表現することができていた。ここからは，C2においては，タイヤ４個と箱２個を直接結び付けることは難しく，両者をつなぐ「車１台」という別の対象が必要であったことがうかがえる。

【1台にタイヤ３個，箱２個使う車について】
T　：（30÷3=10，車が10台必要であることを全員で確認する）ここまでいいですか？箱いくつ必要？
<u>C２：5こ。</u>
T　：箱5こ？
<u>C２：あっ違う？ 14こ！</u>
T　：みんな箱いくつ必要？７台のときはいくつ？
C　：14個。
<u>C２：20こ！</u>
T　：どういう計算したの？
<u>C２：えっと２こ必要だからそれが10だから。それで，かけ算。</u>

【1台にタイヤ5個，箱2個使う車について】
C2：わかった。箱12こ！（30÷5=6の6を使う）
【1台にタイヤ8個，箱6個使う車につて】
T　：タイヤが6こあまったんだよね。箱はいくつ必要？車3台できて，1台に箱6こ必要。ちょっと話してみて。
C2：六三18！

6.　2つの授業実践から得られる示唆

本稿では，比例的推論の学習軌道に基づいて，児童の年度当初の現状を理解するとともに，共同で授業実践に取り組む様子を述べてきた。ここでは，特にS1およびS2・S3に関して，本稿で述べてきた児童の思考の特徴や，授業実践から得られる示唆について整理する。

(1) S1「1つの量に着目する：1つの量について，大きさの関係を捉える。ユニットを決め，それを用いて，比べる大きさをノルム化する。」に関して

「廊下の長さを求める」課題では，主にS1の段階について介入を行い，ユニット化・ノルム化の過程について意識化を促したり，理解を深めたりすることを意図した。予想の段階での大きな開きから，児童にとって長い長さを想像することの難しさがうかがえる。量感に関わる課題も授業の中で現れており，「量感がないのにびっくり」といった教師の声も聞かれた。

巻き尺を使わないという条件を与えると，足のサイズ，身長，手を伸ばした幅，歩幅のように，自分の体を使おうとする児童の姿があった。また，児童は，任意単位を決めて計算するよりも，任意単位による実測（例えば，実際に歩いて歩数を調べる）を行っていた。教室や窓1つ分の長さを測って計算することには，自然には進まない（天井を見上げる児童も皆無であった）。3校での実践の特徴から，教師や窓といった大きな任意単位を使うには，サイズがすべて揃っていること，教室の長さを測るといった体験をしていること，正確な長さではなくおおよその長さで良いことが分かっていることなどの条件が必要であるようだ。また，全体の長さが分かるためには，「1つ分の長さ」と「幾つ分」の両方の情報が必要となる。ワークシートからは，両方の情報が書き込まれていない児童も多く存在しており（B校），ユニット化とノルム化についての意識化も必要であることが分かる。中には，これら2つの情報に気付かない児童も見られた。

年度当初に行った事前調査で分類した3つの特徴を参照しながら児童の思考の様子を見てみると，乗法や除法を用いることに目が向いているかという点との関係がありそうである。A校では，教室が単位として使えるかどうかが話し合われる場面があったが，そこでは特徴2の児童が中心になっていた。B校やC校でも，教室を使うアイデアを発言した児童は，特徴2の児童であった。また，「何秒かかるかを測る」（A校）として，時間という別の量と関連づけようとする児童（特徴3）が見られた。B校では，特徴3の児童が，授業中に，使いやすい任意単位（「3マスで大体1m」や「手を使って10m分にする」）を考えている様子が見られた。しかし，その児童は，歩数で歩いて求めていた。なぜ，せっかく考えた任意単位を使わなかったかを問いかけると，「正確じゃなさそう」と答えた。

実践を行った教師は，1m，5m，10mといったきりのいい数だと簡単ではないかという声が児童から上がるものの，「窓が5つでちょうど10mだから，窓がいくつか」という発想には繋がらないと述べた。それでも，実測しているときに，「あと15cmで窓3つ分でぴったり」といった声が上がるなど，実測をする中で，単位を見直したり，より測りやすい単位を見つけたりする可能性があることも述べていた。単に巻き尺で測って終わるのではなく，単位をうまく決めてその幾つ分かが分かれば，かけ算を使って簡単に求めることができる。任意単位をどう決めるかは，実際に測る中で，うまく行

かなかったり，面倒であったりすることを経験することが大切であると考える。

(2) S2「2つの量に着目する：1つではなく2つの量が視野に入り，両方が関わっていることに注意を向ける。」S3「2つの量の間を局所的に調整する：限定された範囲内に留まったり，間違いを含んだりしながらも，2つの量が伴って変わるというイメージを持ち始める。」に関して

「車を作ろう」の課題では，タイヤの他に箱を登場させ，S2やS3の段階に関する介入を行った。これまで2量を同時に扱う学習をあまりしてきていないことが予想されるため，どのような児童の思考が見られるか，興味のあるところでもあった。

多くの児童が図をかいて考えていた。児童にとって，図をかく必要性のある課題であったと言える。しかし，どのような図をかくか，その図をどう使って答を導くかという点で，児童の間での多様性が見られた。タイヤだけの図をかいている児童がいた。同じタイヤの図であっても，4のまとまりが見えるようにかく児童，10×3や15×2のように○を並べる児童など様々である。タイヤ4個に対して箱2個が対応するが，対応の様子をどうかくかも児童によって異なった。車をイメージしてかいたり，記号を変えたり，同じ記号で大きさを変えたりしていた。B校では，上述したように，○を4個かく毎に箱2個をかき，2量を同時にかいていく児童もいた。こうした図の違いは，それぞれの児童が2量をどう見ているか，それらをどう関連づけているかを反映していると言えよう。同じ「7台」と書いていても，タイヤと箱と車の関係をどの程度掴んでいるかは必ずしも同じではない。例えば，2量を同時にかいた児童は，タイヤ4個と箱2個の組み立てユニットを，より意識してかいていたと考えられる。

タイヤだけをかいたり，タイヤと箱の対応がぎこちなかったりする児童は，特徴1の児童であり，その児童の比例的推論（S1 ~ S3）が表れている。しかし，特徴と授業での児童の思考方略が常に整合しているわけではない。B校のC3やC5のように，年度当初は「1量のみ」の方略が目立った（特徴1に分類）が，授業では，2量に目を向けて「2とび」をしたり，乗法を用いたりしている児童もいた。また，C校のC2のように，授業を通して少しずつ考えが変化している児童も見られた。C2は，最初はタイヤの数と箱の数が関連づいておらず，7台という答えが出ていても，2×9の式を書いていた。その後，タイヤの数を3個に変えた練習問題を解く中で，タイヤの3個と箱の2個が結びついたようであった。上述したように，この児童は，タイヤと箱を直接結び付けることは難しく，両者をつなぐ「車1台」という別の対象を構成することが必要であったと考えられる。

一方で，B校のC8のように，「（タイヤ4個に対して）はこは2こだから，28を1/2にして14」と書いている児童（特徴3）もいた。この児童はタイヤの数と箱の数の乗法的な関係に気付いていることが分かる。これほど明確ではないが，A校にも，「10（台）の2倍」として箱の数を求めている児童がいた（特徴3，図6左）。台数と箱の数の関係に着目している様子がうかがえる。これらの児童には，functional ratesの考えの萌芽が見られる。

乗法や除法の式と図とが結びついている児童の多くは特徴2や3の児童であり，ここでも乗法・除法の使用と特徴との関連が見える。乗法の式での予想外の反応は，2×7ではなく7×2をかく児童が多かった点である。7＋7といった加法の式も見られ，児童は，7台の車に箱を1つずつ，次にまた1つずつ置いていくように，箱を割り当てていた可能性がある。

児童は一方の量に注意が向きがちなため，3校の実践では共通して，2つの量のそれぞれについて答えを求めることが問われていることの注意喚起が必要であった。また，特徴1の児童が多いこともあり，上述したように，図を使って何をどう表現しているかに多様性が見られる。図のかき方や使い

方を，児童とともに丁寧に扱っていくことが大切であった。その際，２つの量をつなぐ第３の量（車）の存在を，絵図や記号，言葉などで表現することを促したり，補ったりすることも大切である。図と式，図と推論の関連づけを中心に据えることで，２つの量がどう対応しているかに，児童の注意が徐々に向いていくと考えられる。

7.　今後の課題

筆者らによる，比例的推論を促進することを目指した第３学年での授業実践の試みは継続している。第３学年の後半においても，幾つかの単元の中で，教科書の内容に基づきながら課題を工夫していく予定である。児童は，異なる内容で，類似の問題解決場面に出会うことになる。そこで繰り返される出来事は，児童の比例的推論の特徴を捉える上で，重要な情報を与えてくれると考える。また，筆者らによる児童の比例的推論の実態の理解も進むため，より児童に寄り添った支援が可能になることが期待される。個々の児童との対話を通して，授業改善の視点をよりいっそう探っていくことは，今後の課題である。

引用・参考文献

日野圭子・加藤久恵・市川啓（2020）．小学校下学年における比例的推論の促進のための視点．日本数学教育学会第53回秋期研究大会発表集録，245-248.

日野圭子・加藤久恵・市川啓（2021a）．小学校下学年における比例的推論の学習軌道．日本数学教育学会第９回春期研究大会論文集，71-78.

日野圭子・加藤久恵・市川啓（2021b）．比例的推論の基礎を形成する授業デザインの視点：学習軌道に基づいて．日本数学教育学会第54回秋期研究大会発表集録，133-136.

加藤久恵・寺井あい（2021）．小学校第１学年から第４学年における比例的推論の実態調査．日本数学教育学会第９回春期研究大会論文集，79-86.

Maloney, A. P., Confrey, J., & Nguyen, K. H.（Eds.）（2014）. *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

文部科学省（2018）．小学校学習指導要領（平成29年度告示）解説算数編．日本文教出版．

Resnick, L. B., & Singer, J. A.（1993）. Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg（Eds.）, *Rational numbers: An integration of research*（pp. 107- 130）. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G.（1994）. Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel & F. Confrey（Eds.）, *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*（pp. 41–59）. Albany: State University of New York Press.

謝辞

本研究は，令和３年度科学研究費補助金（20H01671）による助成を得て行われた。

令和３年10月１日受理

DESIGNING LESSONS BASED ON LEARNING TRAJECTORY OF PROPORTIONAL REASONING IN THE THIRD GRADE OF PRIMARY SCHOOL

Hino Keiko, Ueno Yumi, Tajima Tatsuya, Akizawa Katsuki