小学校第３学年における比例的推論の
学習軌道に基づく授業研究：
分数の授業実践と年間の振り返り

日野　圭子・上野　友美・田島　達也・秋澤　克樹

宇都宮大学共同教育学部教育実践紀要　第９号　別刷

2022 年 8 月 31 日

宇都宮大学共同教育学部教育実践紀要　第９号　2022年８月31日

小学校第３学年における比例的推論の学習軌道に基づく授業研究：分数の授業実践と年間の振り返り†

日野　圭子*・上野　友美**・田島　達也***・秋澤　克樹****
宇都宮大学大学院教育学研究科*
栃木県下野市立祇園小学校**
埼玉県熊谷市立星宮小学校***
宇都宮大学共同教育学部附属小学校****

本研究は, 研究プロジェクトの一環として, 小学校第 3 学年の児童の比例的推論の実際を捉えるとともに, 比例的推論を促進する授業を考える上での示唆を得ることを目的としている。筆者らは，2021年度当初の児童への事前調査に基づき，1年間の算数の授業において，幾つかの共通の学習課題を用いた授業を構成し，各クラスで実践を行ってきた。本稿では，年度の終盤に実施した分数の授業実践を対象として，児童の比例的推論の様相を考察し，授業づくりに対する示唆を得る。さらに，授業実践を行った３名のメンバーに，1年間にわたる授業研究への参加について問いかけ，授業者の視点から，比例的推論を促進する授業に対する成果と課題を振り返る。

キーワード：比例的推論，授業実践，学習軌道，授業研究

1．はじめに

本研究は，小学校教員と研究者との共同による研究プロジェクト（例：日野・加藤・市川，2020, 2021a，2021b，印刷中）の一環として行われている。

プロジェクトでは，小学校下学年において，児童の比例的推論の基礎を形成する授業について探究を行っている。比例的推論の進展を捉える数学教育の研究はこれまで数多く行われてきた。研究の多くは小学校高学年以上を対象とし，また，児童生徒の困難が報告されている。そうした現状を鑑み，本プロジェクトの探究の焦点の1つは，小学校下学年の児童の実態を捉え，授業を通して働きかけていくことである。

もう1つの焦点は，授業研究の手法を用いたデザイン研究（例: Cobb et al., 2017）の推進である。比例的推論の進展をモデルによって捉える研究は，理論を反映したモデルの検証であったり，調査に基づくモデルの構築であったりすることが多く，授業実践を中核とした研究の在り方については考察の余地がある。さらに，比例的推論の形成を促す指導方法として，スキーマベースの方法が指摘されている(例: Nunes et al., 2016)。そこでは，生徒が文章問題をタイプ別に分類し，類似の問題を見たときにタイプを同定でき，同様の思考方略で解けるようになることが目指されている。本プロジェクトでは，思考方略の指導を行うというよりは，日本の現行の算数科教育課程の下で，様々な算数の内容と関連づ

† Keiko HINO*, Yumi UENO**, Tatsuya TAJIMA*** and Katsuki AKIZAWA****: LESSON STUDY BASED ON LEARNING TRAJECTORY OF PROPORTIONAL REASONING IN GRADE 3
Keywords: Lesson study, Proportional reasoning
* Graduate School of Education, Utsunomiya University
** Gion Elementary School, Shimotsuke-shi
*** Hoshimiya Elementary School, Kumagaya-shi
**** Utsunomiya University Affiliated Elementary School
（連絡先：khino@cc.utsunomiya-u.ac.jp）

けたり内容を発展させたりすることによって，個々の算数の内容の理解を深めつつ，比例的推論の促進を図っていく授業の在り方を探究している。

2021年度は3つのチームを形成し，チーム内・チーム間の交流を図りながら，研究を進めた。筆者らのチームでは，小学校第 3 学年の児童の比例的推論の実際を捉えるとともに，比例的推論を促進する授業を考える上での示唆を得ることを目的として，授業研究を行ってきた。本チームの3名の教員（Y，T，Kと呼ぶ）全員が，小学校第3学年の算数指導に関わっていたためである。

本稿では，2021年度の終盤に実施した分数の授業実践を取り上げ，児童の比例的推論の様相を考察する。また，授業実践に携わった3名のメンバーに，年間にわたる本授業研究への参加について聞き，授業者の視点から，比例的推論を促進する授業に対する成果や課題を振り返る。

2．デザイン研究の取り入れ

デザイン研究は，特定の実践（生徒の数学的実践，教師の指導実践等）の形の参加者による開発を「エンジニアリングする」ことを意味し，更に，それらの実践の開発とそれが生じる文脈（支援の手段を含む）を組織的に研究することを含む（Cobb et al., 2017, p. 208）。Cobb et al.（2017）は，デザイン研究の実用面と理論面の両面の存在を次のように述べている。

> 実用的に(pragmatically)，それ〔デザイン研究〕は学習を支援するためのデザインを探究し，改善することを含む。理論的に，それは学習の過程と，学習を支援する方法の両方についての推測を形成したり，テストしたり，改善したりすることを含む。従って，デザイン研究の産物は，デザインとして寄与する実際的な人工物(artifact)，プログラム，テクノロジー，システム等と，デザインの原理を構成する理論の両方を含んでいる。（p. 208）

このように理論と実践の両面に対する貢献は，デザイン研究の特徴である。

本研究は，小学校下学年の児童の学習を支援するデザインの構築，および，学習の過程と方法の両面についての推測の形成や改善を目指しており，デザイン研究の特徴を有する。その際，デザインの構築に当たり，「学習の経過についての仮説」として学習軌道の概念を援用し，また，デザインの探究や改善を，授業研究の手法を用いて行っていく。

（1）学習軌道の設定

「学習軌道」とは，ある学習目標に向けて，心的過程や行為を発生させるために設計された一連の課題を通して推測される，子どもの思考や学習の記述である．本研究では，比例的推論の基礎の形成のための授業デザインの方針等を得るために，Scalar ratiosおよびFunctional ratesの進展に対して段階を設定した。以下，本稿で対象とするScalar ratiosについて述べ，Functionalについては項目のみを記す（日野他, 2022）。

<u>Scalar ratiosに関して</u>

S1：１つの量に着目する：1つの量について，大きさの関係を捉える。ユニットを決め，それを用いて，比べる大きさをノルム化する。

S2：２つの量に着目する：1つではなく2つの量が視野に入り，両方が関わっていることに注意を向ける。

S3：２つの量の間を局所的に調整する：限定された範囲内に留まったり，間違いを含んだりしながらも，2つの量が伴って変わるというイメージを持ち始める。

S4：２つの量の間に対応を付ける：2つの量が伴って変わることを使って，問題解決をする。数えたり，加法的関係を使ったりすることが主流であり，局所的に乗法的な関係に着目し，使っていく。

S5：２つの量の間に乗法的関係による対応を付ける：2つの量が伴って変わることを使って，問題解決をする。2量の間の乗法的関係に着目し，積極的に，また，意識して，その関係を使っていく。

<u>Functional ratesに関して</u>

F1：限定的に対を考える。

F2：より一般的に対応づける。

F3：構造を捉える。

学習軌道は，授業をデザインする他に，授業中の児童の様子を捉え，授業の省察や改善を行う上でも用いていく。また，それらを通して，学習軌道自体も改善していく。

（2）授業研究

教師と研究者の共同での授業デザインを進めていくために，授業研究の手法を用いる。藤井(2021)は，授業研究のサイクルを5つの要素から特徴づけている（p. 8）。筆者らは，Zoomによるオンライン会議をベースに，これらのサイクルを辿った。

「目標設定と実態把握及び計画立案」「学習指導案の検討と作成」の側面では，どの単元のどの内容に比例的推論との関わりを見出すか，どのような教材を使うかなどを含めて，話し合いを行った。「研究授業」は対面では行わず，授業の様子を撮影したビデオや児童のワークシートを，クラウド上に保管し，それらのデータを見ることで行った。個別の児童にカメラを合わせた撮影を行うこともあった。授業の実施時に差があったため，既に行われた授業ビデオ等を閲覧することで，自分の授業を構築していくこともあった。「研究協議会」も，時期に沿って話し合う内容が異なったが，3名が授業を実施した後は，各実践や児童の様子を，ビデオやワークシートをもとに話合い，どのような比例的推論が見られたかを検討していった。「反省・総括」は，本稿のように，論文としてまとめる作業過程での話合いを行った。

このように，校内研修等の授業研究とは違うかたちを取りながら，サイクルを回していった。

3．分数における授業実践から

筆者らは，1年にわたって5回，共通の課題を設定し，上記に示したかたちで授業研究を行った（日野他，2022; 上野他，印刷中）。本節では，2022年2月～3月にかけて行った分数の内容での授業実践について述べる。

（1）比例的推論との関係について

第3学年の分数の学習には，等分してできる部分の大きさや端数部分の大きさを表すために分数を用いることを知り，分数の表し方や，分数が単位分数の幾つ分で表せることを知ることが含まれる。また，思考力・判断力・表現力に関わり，数のまとまりに着目することや，分数を日常生活に生かすことという事項も含まれている（文部科学省，2018）。

分数の意味として分割分数や量分数を学ぶことは，比例的推論の進展においても重要である。例えば，Aのリボンの長さがBの1/3であることから，Aの値段もBの1/3であると推論する際には，Scalar ratiosとして1/3が使われているが，ここではBのリボンを3つに等分割するという操作が使われる。

一方，Scalar ratiosが整数ではなく，小数や分数の端数である場合の難しさは，これまで多くの研究によって指摘されている。「1/2」（半分），「1/4」（半分の半分）等の1/2の累乗の場合と，それ以外（1/3や1/5等）との間にあるギャップは，指摘されている難しさの1つである。例えば，布川（2007）は，小学3年生に対する比例的推論の授業を行った後の調査における4名の解答を詳細に分析している。そこでは，次の2問が対象とされた。

・第7問：12 本で 280 円のえんぴつがあります。このえんぴつ 15 本ではいくらでしょう。
・第8問：9 個で 390 円のアイスがあります。このアイス 12 個では，いくらでしょう。

第7問は「半分の半分」を使うことで推論が出来るが，第8問では「1/3」の扱いが必要となる。実際，4名中2名は第8問を解決できなかった。4名中3名の児童が，第8問に対して「半分」を使った推論からスタートした。そこから抜け出し，1/3という下位単位を構成することが出来た児童は，図で考える中で1/3への気付きを得ていた。一方，抜け出すことの出来なかった児童は，半分の半分を適用すること自体が検討されずに終わっていたり，図には戻らず式の形でまとめることに気持ちが向いていたりしていたことが考察されている。

このように，1/3という下位単位の構成が難しいという結果を受け，筆者らは，小学3年の分数の学習後に，比例的推論の課題を扱うことで，1/3を使うという推論を顕在化させることが出来ないかと考えた。児童が自ら構成していくことにハードルのあるScalar ratiosを授業で扱うことで，児童がその難しさを乗り越えていく上での手がかりを得たいと考え，分数を使った比例的推論の課題を提示することにした。また，課題の解決は，学習した分数を，日常生活に生かす場にもなると考えた。

（2）授業のねらいと手立て

授業のねらいは，以下のように設定した。

・板の長さを分数で表したり，板の値段を求めたりすることを通して，端数部分の大きさを1/3と捉え，1/3をScalar ratiosとして用いて，比例的推論を行うことができる。

また，授業の計画を立てるにあたって，次のような手立てを組み入れた。

・板を購入するという具体的場面を考案し，端数部分を分数で表現する必要性を持たせる。測定値としての分数の意味として，単位を意識させ，全体－部分の関係に気付くようにする。なお，このアイデアは，Simon et al. (2018) を参考にしている。
・連続量を扱うことで，n個のものを1とみるという難しさを軽減する。
・整数で表される長さの板の課題を最初に扱い，児童が課題解決に対する見通しを持てるようにする。
・値段を求める際に，値段が比例関係をベースに設定されていることを「単位の2つ分」「3つ分」の値段を出すことで示す。それに基づいて，端数部分（$\frac{1}{3}$や$\frac{2}{3}$）の値段をどう考えたらいいかを問いかける。

（3）授業の実際

授業は，3クラス（K，Y，Tと記す。児童数は34名，28名，5名である）で行った。実施した日は，3月9，10日（Kクラス），2月2日（Yクラス），3月11日（Tクラス）である。以下では，各クラスの授業の概要を述べる。Yクラスの授業は，最も早く実施され，他のクラスの授業者によっても参照された。なお，授業の記録では，Kクラスの児童はK1，K2等と記し，不特定の児童はS，SS（複数）と記すことにする。各クラスの板書は付録を参照願いたい。

①Yクラスの授業の概要

<u>導入場面</u>

「DIY（Do It Yourself)」のスライドを示し，自作の家具を作るために，ホームセンターで板を買いたいという場面を提示した。そして，「この長さの板が欲しい」として，スライド上で，購入したい板を見せた。

<u>課題の理解（板の長さをA単位で考える）</u>

教師が，「これで測ろう」と言って，スライド上で「A単位」の大きさを示した。児童からは「こんにゃく」「コンクリート」という声が挙がった。スライド上で欲しい板が，A単位の7つ分であることを確認する場面では，児童から「7こに分けたうちの1こ」という意見も出されたため，「1こがA」であることも確認した。

その後，スライドから購入したい板の絵が消え，児童は，プリントに書かれたA単位をもとに，欲しい板の長さを書いた。多くの児童は，A単位を測り（2cm），その7つ分を確かめながら図を書いていた。その後，1人の児童が，黒板に図を書いた（図1）。

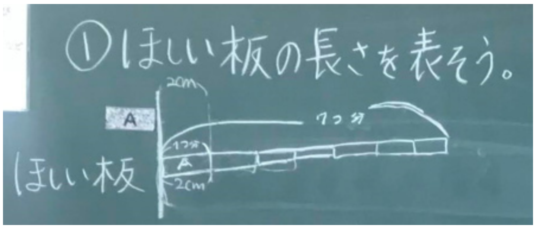


図1　児童の図

書かれた図をもとに，教師が「お店の人にどんな長さの板が欲しいって言えばいいかな」と問いかけると，すぐに「5m！」と言った声が聞こえた。物差しはないこと，今頼りになるのはAだけであることを確認し，プリントに各自が書いていった。店にAの単位を持っていくという情報は，児童の疑問やつぶやきを聞いて，教師が途中で示した。

その後，一斉の場面で，店の人に伝える表現を発表，共有していった。児童からは，「Aの大きさの7つ分」という意見が出されたが，それを受けて，ある児童が，「だったら，Aは1/7…」とつぶやいた。教師は，つぶやきを拾って児童に続きを問いかけ，「Aはほしい板の1/7」であることも板書した。教師が，7つ分と1/7の2つの意見について「これとこれは同じ？」と聞くと，「関係ない」という声も聞かれ，やや戸惑っている様子も見られた。

<u>課題1の提示と解決（板の長さをB単位で考える）</u>

スライドに戻り，板を買うためにホームセンターTAKAHASHIに行ったところ，AではなくB単位で板を売っていることが分かったこと，B単位でしか売っていない店の人に，どんな長さの板が欲しいと伝えたらよいかという課題が提示された。B単位がA単位の3つ分であることは，スライド上で最初から示され，黒板に掲示もされた（図2）。児童からは，Bの板を割ればいいといった声も挙がった。

各自が再度プリントに表現を書いていった。その

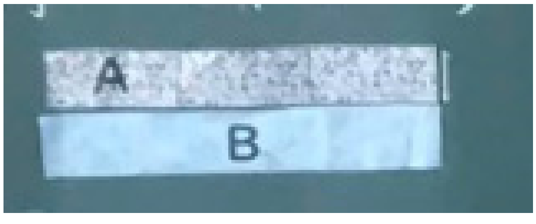


図2　AとBの単位

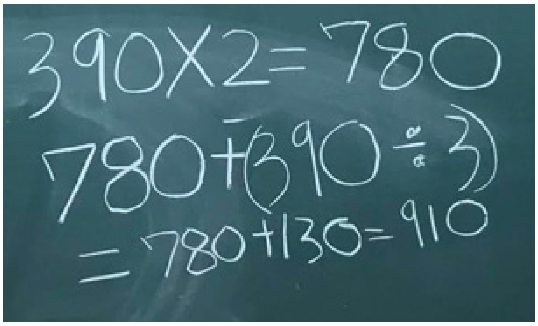
後，一斉の場面では，児童から幾つかの表現が発表された：

・B2つ分とB1/3の長さ
・B2つ分とB1/3をあわせた分ください
・B3つください（後で，鋸で切ると言う）
・Bを1/3にしたものを7こ

この後，「B3つ分」は長さが違ってしまうことを確認し，「2つ分と1/3」および「1/3にしたもの7こ」について，分数を使った他の言い方があるかを問いかけた。後者については「7/3」がすぐに児童から出されたが，前者については，児童はなかなか「2 1/3」という表現を返答しなかった。「2/3＋1/3」「7/3」「3/7」「3/1」といった声も挙がっていた。やっとある児童が，「2 1/3」と答え，教師はそれを板書した。また，「2 1/3」と「3/7」が，確かに求めたい板の長さであることを，B単位の具体物を用いて児童とともに確認していった。

<u>課題2の提示と解決（板の値段を求める）</u>

最後に，購入する板の支払い金額を求める課題を扱った。ここでは，いきなり問いかけるのではなく，B単位が1つでは390円であることを確認するとともに，まず，B2つではいくらか，B3つではいくらかを児童に問いかけた。そして，Bが2 1/3であるこの板の値段が大体どのくらいであるかの見当を付けさせてから，自力解決に入っていった。



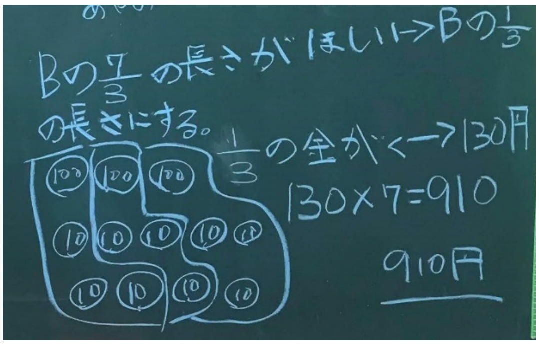


図3　Y1(上)とY2(下)の解法

2名の児童（Y1とY2）が，黒板で考えの発表を行った（図3）。390÷3は未習であるため，Y2は，お金の図を書いて，それを3等分していることを説明した。発表の後，時間が押していたが，児童は，いつものように振り返りを書いていった。

②Kクラスの授業の概要

Kクラスの授業の流れは，Yクラスとほぼ同じであった。Yクラスと異なる点は，購入する板をA単位で8つ分にしたことである。B単位（A単位の3つ分）で測ったときに，端数部分としてのあまりをA単位1つではなく，2つ分にすることで，単位分数1/3を使って測るということに，児童の注意を向ける意図があった。

Aの単位で「Aの石の8つ分」の長さの板を買おうとホームセンターに出かけたが，Bの単位で売っていることが分かったため，「Bの長さを使って板を注文する」課題を提示した。Yクラス同様，B単位がA単位の3つ分であることは，最初から示された。

児童は，図や言葉を使って考え，自分の考えが書けたら，出歩いて近くの友達と確認しあっていた。困惑の声も最初に聞こえており，友達同士で教え合ってもいたと思われる。その後，一斉の場面で，3名の児童が，図を書いて考えを発表していった。K1は，「欲しいのはA8個分だから，BはAの9個分になっちゃうからA1個分取る」と述べた。Aを使って表現していることが分かる。K2は，「B2つでA6個分で，もう1こBを足すとA1個分多くなっちゃうから，B の2/3」のように述べた。Bの2/3という表現が使われている。K3は，図4をかいて説明をしたが，欲しい板を「1，2，…9」と書いたことについてはあまり述べず，K2と同様の説明を行った。

その後，これらの考えをもとに，どのように注文したらいいかを更に児童に聞いていった。その結果，

・Bの板2枚とBの2/3をください
・Bの8/3をください
・Bの2と2/3ください

の3つに整理がなされた。Bの8/3については，ある児童が次のように説明を行っていた：「Bの板は，3つにわけると，Bの1/3は3つ分だから，Bの8/3と考えればいい。」

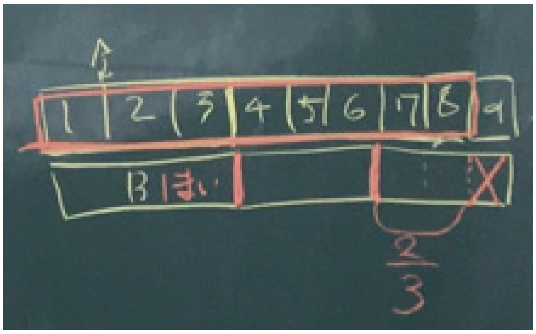


図４　K3の図

第１時は時間切れとなったため，値段を求める課題は次時に扱われた。そこでは，前時の復習の後，児童が各自で考えたり友達と教え合ったりしながら，解決をしていった。一斉の場面での授業ビデオは残っていないが，以下の３つの考え（図は書かれない）が発表され，どれも「390÷３＝130（A1枚分）」を使って解決がされているところをまとめていった。

・１つの値段 130　390÷３＝130（A1枚分）
　Bが３枚1170円　　　1170－130＝1040
・2/3の部分 130＋130＝260　780＋260＝1040
・180×８＝1040

また，390×３－390÷３＝1040のように，１つの式に表すことができることも付け加えられた。

③Ｔクラスの授業の概要

Ｔクラスでは，キズネール棒のセット（図5）を個々の児童に配布し，キズネール棒を操作しながら課題について考えさせた。A店とB店という違う店の人に棒を注文するという場面設定で，課題が提示されていった。板を測る単位については，キズネール棒の白と緑（緑は白の３つ分の長さになっている）を用いた。A店では白の棒を使って，B店では緑の棒を使って注文していった。また，購入する板は，Kクラスと同様に，白い棒８つ分にした。

図５　キズネール棒

A店で，「白８個分の茶色の棒を下さい」と注文することを共有した後，B店に移った。今度は，余りが出るため，児童は困惑を示した。「余る」「白２個分余る」「白使っていいの？」という声が聞こえた。緑は白の３個分である事を，手元のキズネール棒から見出した児童が「緑は白の３個分」と発話し，全体で確認をしていた（図6）。

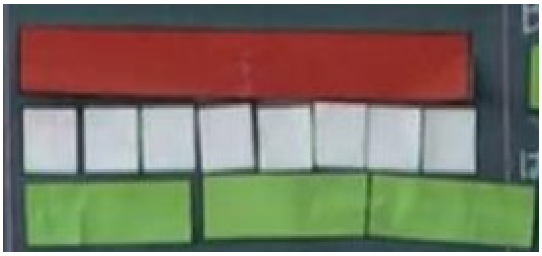


図６　欲しい板と２つの単位

キズネール棒を使って個別に考えた後，一斉の場面で，T1が「緑２つと緑2/3の大きさをください」を発表した。その後，T2が，緑３個分を9/3とする考えを発表した。以下はそのときのやりとりである。

T2：まず，３分の９は３つ分だから，ダメだから。３分の８だったらこんな感じで（図７を書くが，3/3，6/3，2/3と書く）。これで３分の３，これで３分の 6，これが３分の２だったら。こっちで説明しようかな（図の6/3を3/3に修正する）。これは８こ分だから。棒の長さになる。

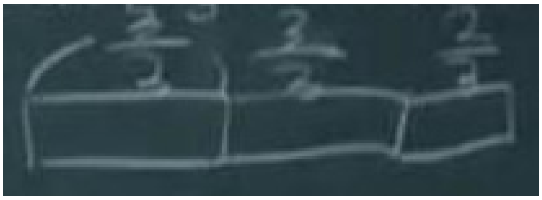


図７　T2の図

T：T2の分かる？ ３分の９って言ったんだけど聞こえた？何が９こあるの？
S：白？
T：白だよね。白は緑の？ １つは何ていえばいい？白は緑の何て言えばいい？
SS：…
T3：３分の１。
T：ここは平気（白１つと緑１つを縦に並べて見せる）？ ３分の１はいくつあるの？

T：9個になっちゃう。茶色はここまで（手で押さえる）。
T2：これで3分の1（図6の白を指しながら），3分の2，3分の3，3分の4だけど，ここは足されないの（緑2個分を指す），3分のだから。3分の4，3分の5，3分の6，3分の7，3分の8でここ。
T：じゃあ3/8くださいっていえばいいってこと。
T2：そう。

最後に，緑1つが390円であるときの，板の値段を求める課題を扱った。個別解決の後，児童が，

・「390×2＝780」と「390÷3=130 130×2＝260」から，両者の答を足す（T3）
・「390×3＝1170」から「390÷3＝130」を引く（T1）

を発表した。T3は，後者の考えを理解した後，「この問題には390÷3を使わないとできないんだね」と述べていた。最後に，130が図でどこを表しているかを教師が問いかけ，130円が幾つあるかを児童と数えた後に，式が作れないかを考えた。それに対しては，T3が「作れる。130×8。」と述べた。

（4）児童の比例的推論の考察

本実践では，Scalar ratios（特に1/3）の学習軌道について，1つの量（板の長さ）から2つの量（長さと値段）への移行を段階を踏んで扱いながら，児童のS3～S5の実際を捉えていった。

半分（1/2や1/4）と比べて1/3では，2つの量の関係を比例的に捉えて推論をすることの難しさが先行研究から指摘されているため，1つの量の段階で，ユニット化とノルム化の過程を丁寧に扱った。具体的には，欲しい板に対して2つの単位を登場させ，1つ目の単位で板の長さを測定した後に，2つ目の単位で測定する。すると，端数部分が出るため，単位を取り直す必要が生じる。ここで，1つ目の単位をヒントに，2つ目の単位の下位単位である1/3を構成し（ユニット化），端数を含む全体の長さを2つ目の単位で測定する（ノルム化）ことを想定した。

予想通り，児童は1つ目の単位を使って，板の長さを「7個分」や「8つ分」と表すことが出来た。2つ目の単位で端数が出る場面に直面したとき，2つ目の単位のみで表すことを求められると，児童の多くは戸惑っている様子であった。Tクラスでは「緑2個ください」と，端数部分を無視した表現をした児童がいた。また，前述したK1のように，Bの単位だけでなくAの単位も使って表現をしている児童も複数名見られた。これらの児童は，端数部分の測定に1つ目の単位を使っているという点ではユニット化が見られる。しかし2つ目の単位との関係で1つ目の単位をユニット化し，それを用いてノルム化してはいない。2つの単位で別々に，ユニット化とノルム化が行われていたと考える。

授業の概要で示したように，児童による発表では，「2つ分と2/3」「8/3」「2 2/3」（K・Tクラス）のように3通りが出された。児童のワークシートからも，どのクラスも多くの児童がこれらの表現，特に「2つ分と2/3」のように言い表していることが分かった。ここからは，端数部分が2/3（Yクラスでは1/3）であることを，2つの単位の関係から見出していることが分かる。ここでは，上記の児童よりもユニット化が進み，2つ目の単位との関係で1つ目の単位が捉えられている。

しかし，その一方で興味深いのは，「2つ分と2/3」という表現と「2 2/3」とは，それ程直結していないことである。Yクラスで授業者が，「B2つ分とBの1/3の長さを合わせた長さ」という言い方に対して，分数を使った別の表し方を問いかけたが，児童はなかなか応答しなかった。同一単位で測っていても，整数と分数で表された測定値の間にはギャップがあるようである。これは，「2つ分と2/3」という表現が，ユニット化の過程としてもまだ途上にあることを示していると考える。

「B単位で8/3ください」という注文の仕方は，B単位の1/3をユニットとして定め，そのユニットをもとに板の長さをノルム化している洗練された表現と言える。こうした表現をした児童の数は多くはないが，各クラスで見られた。ここでは全体の長さが，B単位の8/3と割合で表現されている。この表現を可能にしているのは，A単位はBの1/3（Aの3つ分がB）であり，1/3の8つ分が全体の長さであるという単位分数を媒介にした推論である。Lobato et al. (2010) は，「分数」に関わる本質的なアイデアは，比例的推論の発達に重要な関わりを持つと述べ，特に，単位分数のアイデアの重要性を指摘する。Lobatoらの具体例でも同様の推論が挙げられている。単位分数を媒介に2つの数量の関係を分数で表す活動は，小学3年生でも可能であることが分かる。

このように洗練された表現が生まれた要因の1つには，2つの単位の関係を，基準量を交換して見て

いく機会があったことが考えられる。実際，1つ目の単位で測定する場面で，既に「7つ分と1/7」という関係に児童が気付いたり，キズネール棒のような具体物を使ったり，単位間の関係を図で掲示したり（図6）していた。授業者も，そうした関係があることを周知しており，活かそうとする意図もあった。また，T2の自力解決の様相や発表時の発話を詳細に見て行くと，T2が「8/3」やその元の「1/3」に気付いていった際には，物差しが何度も使われていることに気付く。1cmと8cm，1cmと3cmといった目盛りが，児童にとっての拠り所にされている様子がうかがえ興味深いところである。

しかしながら，「8/3」の表現を児童が説明し，他の児童と共有するには，教師が介入しながらの児童との丁寧なやりとりが必要であった。特に，児童による図を解釈していく中で，ユニット化やノルム化の過程が顕在化されていったと考える。

その一方で，顕在化されていない側面も見られる。例えば，図4で振られた「$\overset{\text{A}}{\downarrow}$」という位置を表す表記や，図7での6/3から3/3への修正には，児童のどのような意図が反映されていたのだろうか。また，上述したように，T2は図6を使って自分の考えを説明する中で，「これで3分の1（図6の白を指しながら），3分の2，3分の3，3分の4だけど，ここは足されないの（緑2個分を指す），3分のだから。」と，やや強調した口調で主張していた。T2の主張はどういったものなのだったのだろうか。また，次の瞬間，T2は「3分の4，3分の5，3分の6，3分の7，3分の8でここ。」と数え続けていった。T2はどのような意図を持って数え続けたのだろうか。「8/3」の表現を生み出したユニット化やノルム化の過程について，児童の発話や行為は，情報を与えてくれている。児童による表現や修正の詳細について，やりとりを通してより一層顕在化していくことが求められている。

このような1つの量でのユニット化・ノルム化の経験の後，児童は，2つ目の単位1つ分の値段が390円であるという条件の下で，比例的推論を用いて，板の値段を求める課題を解決していった。授業の概要で述べたように，多くの児童が，ビルドアップ方略を用いた解法（部分の値段を求め，加えたり引いたりしながら，全体の値段を求めていく）を用いて推論していた（S4）。ビルドアップ方略という点では，あまりが1/3である長さを扱ったYクラスと，あまりが2/3である長さを扱ったK・Tクラスとの間に差は見られなかった。しかし2/3の方が，1/3を2個分足すことと，1/3を引くことの両方に児童が気付きやすかった。もし1/3ではなく，1/5という下位単位を扱ったら，どうであろうか。下位単位の構成に関わってどのような数値が良いか，更に考えていく必要がある。

S5については，乗除を用いた解法（390÷3＝130 130×8＝1040等）が見られた。ここには，求める板の長さが2つ目の単位の8/3である事の理解が関わってくる．上述したように，児童は，2つの単位の関係を見直し，単位分数や測定の知識を活用して，「8/3」という表現を生み出したり，解釈したりしていた。Kクラスでは，第1時の最後に，授業で出てきた3つの表現のどれが良いかを児童に聞いたところ，8/3を挙げた児童は12名であり，第2時にS5の思考方略を用いて問題解決を行った児童は4名程度であった。授業で扱うことで，児童の理解が少しずつ深まっていると考える。

最後に，先行研究で指摘されている難しさは，本実践の児童には，それ程見られなかった。1つの量での学習や支援が影響していると考える。その一方で，どのクラスの児童も，主に式を使って考えていた。図を書くことが強調されたKクラスでも，児童の多くは，式や言葉のみで説明をしており，図を書くことはそれほど積極的にはなされなかった。Tクラスでは，キズネール棒が手元にあったため，それを使っている児童も見られた。

4．1年間の授業研究の振り返り

本研究に参加した3名の教師に，1年間の授業研究に対する振り返りをお願いした。以下は，各報告からの抜粋である。

・このような形での共同実践は初めてであった。一緒に指導案を考えたり，教材，教具，課題で扱う数値等，細かなことについても共に検討したりしたことは，とても貴重な経験となった。授業動画やワークシート等を共有することで，他の教師のよかったところを参考にしたり，自分の実践する学級に合うように改善したりすることができた。（Y）

・Scalar，Functionalについて深く考える機会となった。多くの場面で児童はScalarで考えていた。しかし，重さの実践ではFunctionalの

考えが多く出ていた。1円玉1枚とBB弾2こが同じ重さであり単位も「枚数」と同じである。事後調査のカルピスの問題でも同じ「カップ」の単位のもとFunctionalで考えている児童がいた。同じ単位のときに児童はFunctionalの考えを使い易く，卵の個数と価格のように単位が違うものはScalarの考えが出易いかもしれない。（T）

・今年の実践では，1つ分，いくつ分，全体ということを意識して学習に取り組む姿が見られた。1つ分やいくつ分というのは図で表すと似ているようで全く異なる部分を指すことが少しずつ理解できた児童も出てきたと思う。また，様々な条件が出てきたときに念頭で処理するだけではなく図を使って考えたり，友達に理解してもらえるように図を使って説明したりする場面も多く見られるようになった。今後の算数で割合，分数の乗除などの学習の基礎となることは間違いない。3年生の簡単な場面からもこの先を意識して指導に当たるのはとても大切なことだと感じた。（K）

オンラインというかたちでの授業研究の進め方への可能性，また，Scalar ratiosとFunctional ratesという学習軌道を使ってきたことから，それらについて考える機会となったことが書かれている。教師による学びが，授業を通して児童の学びに繋がっている様子もうかがえる。

各教師は，研究の進め方についても，特徴や課題を述べていた。

・多様な単元で実践してきたことに意味があったと感じる。教科書から大きく離れていないことにも特徴がある。さらに，個人的なことを言えば，今年度，自分は6年生の担任であったため，学校の協力を得て，経験の浅い2人の教師が担任しているクラスを借りて，授業を実践した。単元の始めや実践する前後に，進め方や算数の学習として大切なこと，比例的推論の進展のために大切なことについて話し合いをしたり，実践後に共にリフレクションをしたりしたことは，若手教師育成につながったのではないかと，2人の教師の感想を聞いて思った。（Y）

・基本的にはScalarからFunctionalへという進展を考えているが，重さの学習では，比較的Functionalが出やすかった。そのような教材を探究していくことも，これからやっていきたいことの1つである。（Y）

・キズネール棒を分数の授業で活用したが効果的であった。児童の考えを支援するツールとしてのよさを感じたため，教具について提案していくことも大切であると思う。（T）

・実践をし始めると，児童が考えるにはボリュームがある内容が多く，時間がかかった。単元の中で組むと，予定していた時間がより遅れる可能性がある。工夫をして単元に取り込みながら，通常の指導の中でも日常的な指導ができるとよいと思う。（K）

デザイン研究の産物として，異なる内容での教材や教具の開発，特に，これまであまり視点が当たっていない下学年でのFunctional ratesの基礎を育てることを目指した教材や教具の発掘について述べられている。日常的な指導の重要性も述べられた。日々の忙しさの中で，どのように児童への効果的な介入をしていけるか，さらに，下学年の担任ではない場合の本研究への関わり方についても課題がある。

5．まとめと今後の課題

本稿では，2021年度終盤で行った分数の実践について述べた。また，教師の1年間の振り返りについても報告した。本研究が行っているデザイン研究はまだ途上にある。学習軌道を参照しながら，授業のアイデアを考え，授業での児童の思考の様子から学ぶことを，次年度も継続していきたい。その際，振り返りで挙げられている研究上の課題についても考えていきたい。

付記

本研究は，令和3年度科学研究費補助金（20H01671）による助成を得て行われた。

引用・参考文献

Cobb, P., Jackson, K., & Sharpe, C. D. (2017). Conducting design studies to investigate and support mathematics students' and teachers' learning. In Jinfa, C. (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 208-233). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

藤井斉亮 (2021). 授業研究の概念規定と価値. 日本数学教育学会編, 算数・数学授業研究ハンドブック (pp. 6-15). 東洋館.

日野圭子・加藤久恵・市川啓 (2020). 小学校下学年における比例的推論の促進のための視点. 日本数学教育学会第53回秋期研究大会発表集録, 245-248.

日野圭子・加藤久恵・市川啓 (2021a). 小学校下学年における比例的推論の学習軌道. 日本数学教育学会第9回春期研究大会論文集, 71-78.

日野圭子・加藤久恵・市川啓 (2021b). 比例的推論の基礎を形成する授業デザインの視点：学習軌道に基づいて. 日本数学教育学会第54回秋期研究大会発表集録, 133-136.

日野圭子・上野友美・田島達也・秋澤克樹 (2022). 比例的推論の学習軌道に基づく授業実践の試み：小学校第3学年における実践から. 宇都宮大学共同教育学部研究紀要, 72, 613-629.

日野圭子・加藤久恵・市川啓 (印刷中). 比例的推論を支える概念的側面についての考察. 日本数学教育学会第10回春期研究大会論文集.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6–8*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

文部科学省 (2018). 小学校学習指導要領（平成29年度告示）解説算数編. 日本文教出版.

Nunes, T., Dorneles, B. V., Lin, P-J., & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). *Teaching and learning about whole numbers in primary school: ICME 13*. Springer Open. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-45113-8

布川和彦 (2007). 小学校３年生による比例的推論の課題の解決：下位単位の利用に焦点を当てて. 上越数学教育研究, 22, 1-10.

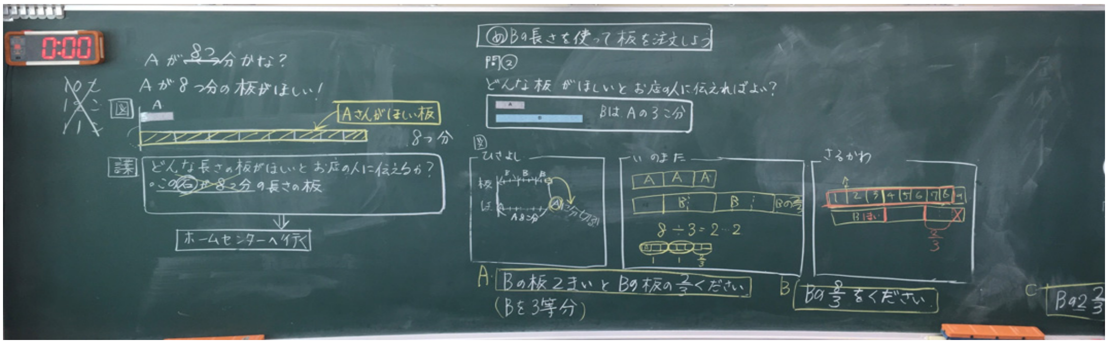
Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the learning through activity research program. *Journal of Mathematical Behavior, 52*, 122-133.

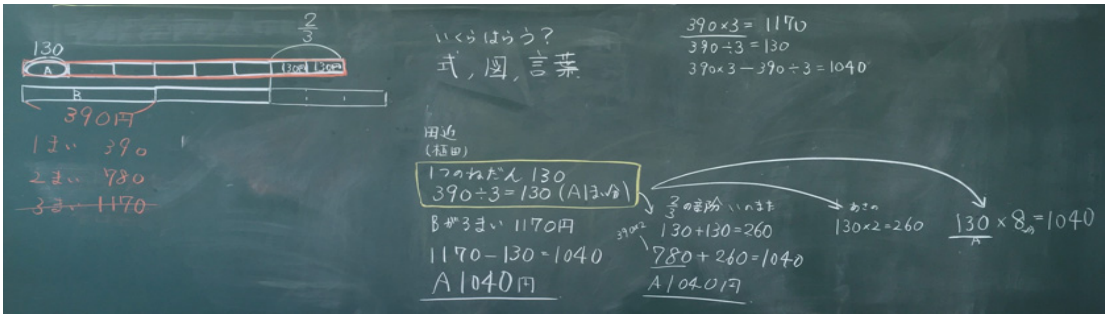
上野友美・田島達也・秋澤克樹・日野圭子 (印刷中). 第3学年の授業実践からみる児童の比例的推論の実際：事例の考察. 日本数学教育学会第10回春期研究大会論文集.

令和４年４月１日 受理

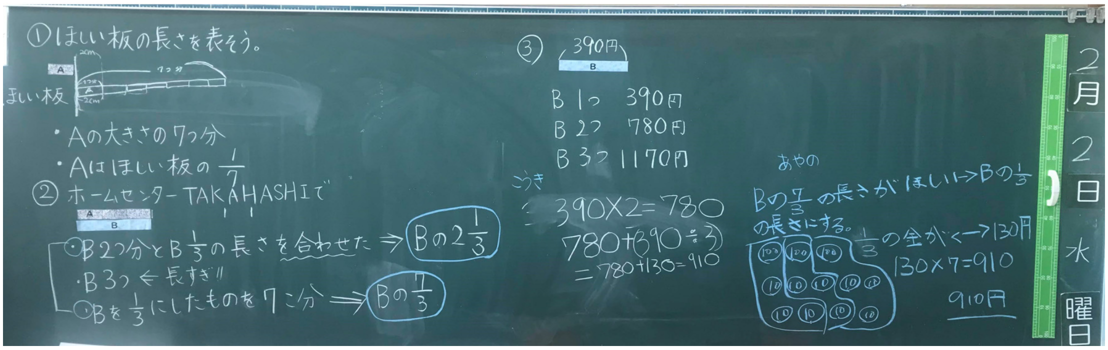
付録：3クラスの板書

Kクラス（第1時（上），第2時（下））

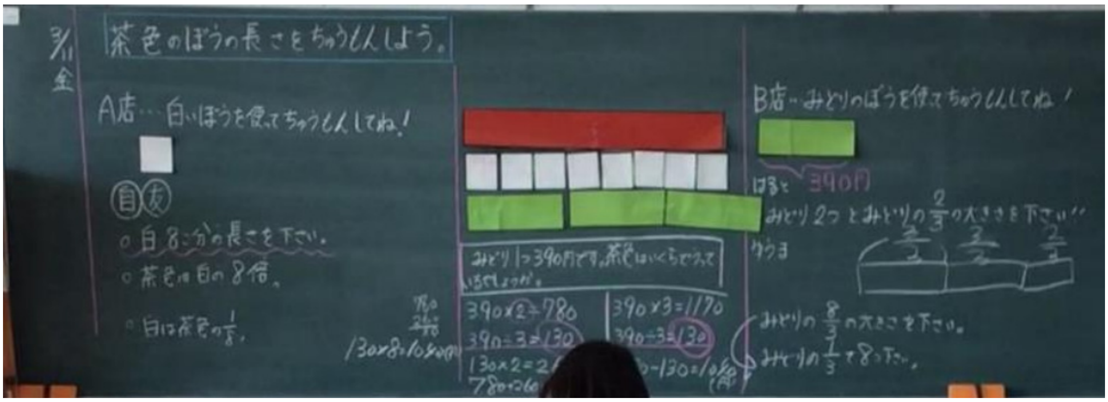




Yクラス



Tクラス



LESSON STUDY BASED ON LEARNING TRAJECTORY OF PROPORTIONAL REASONING IN GRADE 3

Keiko HINO, Yumi UENO, Tatsuya TAJIMA and Katsuki AKIZAWA