

# 中学校数学科における「証明をよむ活動」を 取り入れた論証指導について

増渕 正人・高野貴亜紀・大塚 正也・櫻井 昭洋  
秋澤 克樹・高橋 繁浩・日野 圭子・川上 貴

宇都宮大学共同教育学部教育実践紀要 第9号 別刷

2022年8月31日



# 中学校数学科における「証明をよむ活動」を 取り入れた論証指導について<sup>†</sup>

増渕 正人\*・高野貴亜紀\*・大塚 正也\*・櫻井 昭洋\*\*  
秋澤 克樹\*\*・高橋 繁浩\*\*・日野 圭子\*\*\*・川上 貴\*\*\*\*

宇都宮大学共同教育学部附属中学校\*

宇都宮大学共同教育学部附属小学校\*\*

宇都宮大学大学院教育学研究科\*\*\*

宇都宮大学共同教育学部\*\*\*\*

学習指導要領中学校数学科（2017年公示）では、第2学年の図形領域において、知識及び技能の習得だけでなく、論理的に確認したり、新たな性質を見いだしたりすることを通して思考力、判断力、表現力等を身に付けることが求められている。証明を書くことを苦手とする生徒が多い中、本研究では、証明を書くことに必要以上にこだわらずに、証明の見通しをもつことや、結論を中心に証明を捉えることを含む「証明をよむ活動」を取り入れた論証指導を、中学2年生を対象に設計・実践した。本稿では、実践の成果を報告する。

キーワード：三角形の合同証明，見通し，発見，証明をよむ活動

## 1. はじめに

学習指導要領中学校数学科（2017年公示）で育成したい「数学的な見方・考え方」として、「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」([1])が示されている。特に、第2学年における論証指導では、「必要以上に証明の書き方に拘（こだわ）ることをせず、証明を読むことを通じて証明の根拠の使い方を明らかにしつつ、表現に一定の幅をもたせ、生徒が自分なりに工夫して証明し、よりよいものへと互いに高めていくこと」([1])が重視されている。

小学校算数科では、図形の性質等について実験や操作活動を通して類推や帰納的に考え、知識として身に付けてきた。中学校数学科では、これらの性質等について演繹的に考え、考察したことを整理しながら、証明をしていくことになる。特に、第2学年の図形領域では、平面図形の合同の意味や三角形の合同条件について理解するとともに、証明の必要性やその方法について学習していく。中学校数学科では、このような知識及び技能を身に付けるだけでなく、三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり、証明をよんで新たな性質を見いだしたりすることを通して、思考力、判断力、表現力等を身に付けることも求められている。

証明を書くことに苦手意識をもつ生徒が多い中で、証明を書くことに指導の重点が置かれがちである([2])。一方で、証明をよむ活動の事例分析([3])などは行われているものの、証明をよむ活動の中で、証明の見通しを立てたり、結論を中心に証明を捉えたりすることに着目した実践はあまり行われていない。

そこで本研究では、証明の見通しをもつことや、

<sup>†</sup> Masato MASUBUCHI\*, Takaaki TAKANO\*, Masaya OOTSUKA\*, and Takashi KAWAKAMI\*\*\*\* et al.: Teaching Argumentation with Proof Reading in Secondary School Mathematics

Keywords: Triangle congruence proofs, insight, discovery, and proof reading

\* Junior-High School Attached to Utsunomiya University

\*\*\*\* Cooperative Faculty of Education, Utsunomiya University

(連絡先: t-kawakami@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

結論を中心に証明を捉えることを含む「証明を読む活動」を取り入れた論証指導を、中学2年生を対象に設計・実践した。本稿では、その実践の成果について報告する。

なお、本研究は、宇都宮大学共同教育学部と附属学校園の連携プロジェクトの1つである算数・数学プロジェクト研究「数学的な見方・考え方の成長を促す算数・数学の授業の創造」の一環として行われたものである。

## 2. 設計・実践した論証指導の概要

「証明をよむ活動」を取り入れた論証指導は、「三角形の合同証明」と「二等辺三角形」の2つの単元に跨って設計・実践した。特に、「三角形の合同証明」の単元で経験した証明の見通しをもつことや、結論を中心に証明を捉えることを含む「証明を読む活動」を、「二等辺三角形の性質」の単元の学習に生かせるように設計した。

### (1) 三角形の合同証明 (7時間)

ある事柄について証明をするときに問題には「仮定」と「結論」が存在する。証明問題を苦手とする生徒の特徴として、証明の書き方に意識が向いてしまい、全体の見通しが十分でないまま証明を書き始める傾向にある。つまり、「仮定」から話を進めていき、「結論」に結びつけるということである。その一方で、「結論」から考えていく方が、全体の見通しが立てやすい。そのことを言葉で伝えるのではなく、生徒自身が授業を通して実感でき、自然と見通しがもてる考え方を身に付けるにはどのような授業展開が有効かを考え、下記の活動①～⑥の順序で実践した。

これらの活動は、①～③で基本的な証明の書き方を確認し、④～⑥で採り上げた見方・考え方を通して、生徒自身が証明の見通しをもったり、結論を中心に証明を捉えたりしながら問題解決できることを目的としたものである。

- ① 合同な三角形を選び、合同条件を示すこと
- ② ①に加えて合同条件に必要な等しい辺や角を式で表すこと
- ③ 等しい辺や角の根拠を示すこと

ここで、着目する三角形について最初に提示し、②までの内容を逆に書き進めると、三角形の合同を証明する基本の形となるということを教師が説明した(6行の証明と呼ぶことにした)。

### ④ 三角形の合同を証明させ、そこから結論以外で言えることは何かないか考えること

ここでは、合同な図形の対応する辺や角が等しいことを利用した問題を最初から提示するのではなく、生徒が考えたことを追加問題として採り上げ、新たな証明の形として基本の6行に2行を加えることで、辺や角が等しいことを証明できること、さらに錯角や同位角が等しいことから2行を加えることで2辺が平行であることを証明できることを確認した。

### ⑤ 問題場面の図と仮定を示し、そこから考えられる結論を考えること

④までは、既に分かっていることや条件から根拠を示しながら結論にどのようなようにつなげていか考えさせていたが、ここでは、場面と条件だけを提示し、そこから結論としてどのようなことが言えそうかについて考えさせた。追加発問として、その挙げられた内容同士がどのようにつながっているのかについて、全体で共有しながら、証明の流れとの関わりについて触れた。

### ⑥ 与えられた条件や図から新たに三角形を見だし、その合同を証明すること

角の二等分線や垂直二等分線の作図方法が正しいことを、三角形の合同証明を活用して説明させる。あえて図は与えず、各自で作図したものを使用することで、どのような場合でも命題が成り立つことを示すときには証明が必要であることに結びつけた。

### (2) 二等辺三角形の性質 (3時間)

三角形では、まず二等辺三角形について知っていることを挙げさせ、定義と性質の分類をする。その後、定義を根拠にしながら性質について常に成り立つといえるのかについて、これまでの学習を活用して証明していく。

最初に、二等辺三角形の定義である「2辺が等しい」という仮定から底角は等しいという性質を証明する。三角形の合同で学習してきた証明では、予め2つの三角形が示されていることが多かったが、今回は1つの二等辺三角形の図から証明を進める必要があるため、活動⑥の経験を生かして証明を見通し、頂角の二等分線を補助線としてひくことができようであるという意見を採り上げ、全体で確認し、証明を進めた。

証明を終えたところで、「この結論以外に、今回の証明から新たにどのようなことが言えそうか」と

いう発問を加えた。これは、活動④や⑤を生かした活動であり、結論を中心に証明を捉えることで、生徒からは、辺や角が等しいことが言えそうだという意見が出された。ここで学習する内容に、もう一つ「頂角の二等分線の性質」に関わる定理があることを伝え、今回の証明で新たに分かったことを使って、自分なりの言葉で定理を考えさせた。これまでは、式で表すことで表現してきたが、言葉で表現する難しさを感じながらも、生徒たちは自分の言葉で「自分なりの定理」をつくり、ロイロノートで教師に提出した。

### 3. 「二等辺三角形の性質」の単元における授業の実際

2 (2) で記した「二等辺三角形の性質」の単元における2つの定理を扱った際の授業の実際を示す。

導入で、小学校で学んできた二等辺三角形について知っていることを問うと、(a) 2つの辺が等しい、(b) 2つの角が等しいという2つの意見が挙げられた。各自でワークシートに二等辺三角形の作図をさせ、その書き方を通して (a) を定義、(b) を性質と分類し、定義についての確認をした。前単元の学習では、小学校で得た知識について根拠をもって証明してきたので、今回も二等辺三角形の2つの角が等しいことについて、2つの辺が等しいという定義を基に証明していくことを課題として進めることになった。

最初に、各自で自力解決をする時間を設けたが、なかなか証明を進められない生徒がいたため声をかけると、「三角形が1つしかないためどうしたらいいのかわからない」ということだった。このことを全体で共有し、アイデアを募ると「補助線を引けばよいのでは」という意見が出てきた。そこで、どのような線を引くとよいかを全体で検討してみると、(c) Aからの垂線、(d) AとBCの中点を結ぶ線、(e)  $\angle A$ の二等分線の3つが候補として挙げられた。どの線も見た目は同じであるが、小学校の学習を振り返ると「二等辺三角形を折ってぴったり重なること」から性質を見つけたという話が出てきたことから、(e) の線とすることを共有し、証明を進めさせた。

証明ができた生徒が増えてきたところで、代表生徒に証明を板書させ、全体で共有した。補助線を入れたことを証明にかけていない生徒が多かった

め、追加した条件は、証明の中に付け加えるとよいことを確認した。さらに、定理について確認し、この性質も証明されたことなので、今後は定理として使えることもまとめた。以上の授業の様子を示した板書が図1である。



図1 授業の板書

そして、底角が等しいことを証明できたところで、この証明から他に何か新しいことはいえないか考えさせた。新たに分かったこととして、生徒から  $BD = CD$ ,  $\angle ADB = \angle ADC$  が挙げられたところで、二等辺三角形の性質として、底角が等しいこと以外にも定理があることを伝え、先ほど新たに分かったことから、どのような定理なのかを各自で考え、自分の言葉で定理をつくることを取り組ませた。方向性を示したいため、「頂角の二等分線は〇〇〇」という形の文で作ることを条件とした。生徒たちはいろいろな視点で考え、それぞれの表現で定理を作った。定理ができたものから自分の考えをロイロノートで提出させ、後から全員分の「定理」を共有した。

最後に、ロイロノートに提出されたものを使って、自分の「定理」と級友の「定理」とを比較しながら、視点の違いや共通点について自由に話をさせた後、教科書ではどのようにまとめられているかを全体で確認し、真の定理としてまとめさせた。2つの「新たに分かったこと」をどちらも含み、簡潔に述べられていることに触れることで、生徒から納得した表情が見られた。また、単純に言葉として覚えるのではなく、自ら試行錯誤したり、他者の考えに触れたりしたことで、定理について理解を深めた様子だった。

### 4. 「証明をよむ活動」を取り入れた論証指導の意義 (1) 生徒が考えた定理から

生徒自身の言葉で考えた定理を分類した結果が、図2である。

「垂直に二等分する」に関わる記述
<ul style="list-style-type: none"> <li>・底辺を垂直に二等分する③</li> <li>・底辺の垂直二等分線である③</li> <li>・底辺の中点を通り、底辺と垂直に交わる②</li> <li>・向かい合っている辺の二等分線になり、その辺に垂直な線になる</li> <li>・底辺の中点を通り、底辺と垂直に交わる</li> <li>・底辺を二等分し、底辺と垂直である</li> </ul>
「底辺の中点」、「底辺を二等分」に関わる記述
<ul style="list-style-type: none"> <li>・底辺を二等分する②</li> <li>・底辺の中点と交わる</li> <li>・底辺との交点が底辺の中点になる</li> <li>・向かい合う辺を二等分させる</li> <li>・底辺を半分にできる</li> <li>・底辺の中点を通る</li> </ul>
その他の記述
<ul style="list-style-type: none"> <li>・二等辺三角形を二等分する②</li> <li>・二等辺三角形の二等分線</li> <li>・合同な2つの三角形に分ける②</li> <li>・合同な三角形をつくることができる②</li> <li>・二等辺三角形の高さと同じ②</li> <li>・三角形の面積を二等分する②</li> <li>・底辺と垂直である②</li> <li>・その頂角に向かい合う辺の長さや角の大きさを等しくする？</li> </ul>

図2 生徒が考えた定理の分類

この授業で確認した「新たに分かったこと」は、

- ・  $BD = CD$  (底辺が二等分されていること、底辺の中点を通ること)
- ・  $\angle ADB = \angle ADC$  (頂角の二等分線と底辺が交わった部分の角が等しくなること、垂直に交わっていること)

の2つである。だが、定理(性質)をまとめる活動として取り組ませると、その両方を取り入れたものばかりではなく、「底辺の二等分」に特化したものや、「三角形の面積」のように「新たに分かったこと」からさらに違った視点をもったものまで様々な表現が見られた。これは、一度解決した証明の結論から問題を捉え直すという視点が生徒たちに備わってきている一面であると考ええる。

## (2) 生徒のレポートから

「平行と合同」の単元末にレポートを実施した。生徒から提出されたレポートに書かれた単元の振り返りには、以下の①～③のような記述がみられた。

### ①算数で学習した内容への深い理解に関わる記述

- ・小学校で習ったことを、改めて証明することでより深く理解することができた。
- ・小学生の時は、当たり前前の決まりとして学んでいたものも、自分の力で証明をして、それを納得することができた。

### ②見通しをもつことに関わる記述

- ・証明は導きたい結論に向けて順序を考えながら書く必要があるので、先を見通す力がつく

思った。

- ・ゴール地点から考えると、証明しやすくなることが分かった。
- ・合同を証明するときは、仮定と結論に分けて、結論からさかのぼっていくとどこを証明するかなどが分かりやすくなるということに気付いた。

### ③証明をよむことに関わる記述

- ・ただ証明するだけでなく、そこから分かることを予想することは大変だけど、発見する楽しさもあるので、自分なりに方法を考えて取り組めるように工夫していきたいです。

以上をまとめると、授業中に見られる生徒の活動や生徒自身の表現、学習後のレポートを分析した結果、「証明をよむ活動」を取り入れた論証指導の成果として、以下の点が明らかとなった。

- ・単に覚えてきた知識について、根拠を示しながら証明することで、より深い理解や納得感を生徒が感じられる。
- ・証明をする際に、すぐに証明を書くのではなく、図に印をつけたり、結論からどのようなつながりがあるかを見たりするなど、熟慮した取組や意識の高まりが見られる。
- ・課題の結論に向けての証明ができたところで終わりではなく、そこから「新たに分かることは何か」という視点をもつことで、多面的に考える姿勢が身に付き、発展的な思考につながる。

## 5. おわりに

証明を苦手とする生徒が多い中で、本研究では、証明を書くという形式にこだわらず、証明の見通しをもつことや、図を用いて考えること、一度証明したことから新たに分かることは何か考えること等、「証明をよむ活動」を取り入れた論証指導を設計・実践した。

生徒が考えた定理からは、証明を固定的に捉えず動的に捉え、発展的に考えている生徒の様子が明らかとなった。また、振り返りの記述からは、生徒は、証明を進めるときには見通しをもつことや新たにわかることについて考えることに有用性を感じ、論理的に考えることの必要性やよさを実感していることが明らかとなった。これらは、証明をよむことを通じて証明の根拠の用い方を明らかにしつつ、生徒が

柔軟に表現することや、自分なりに工夫して証明すること、よりよいものへと高めていくことができるような課題設定や授業展開を心掛けてきた成果と言える。このような論証指導の方法は、思考力、判断力、表現力等を身に付ける一助になることが示唆される。

今後の課題として、発見的な視点で証明を捉えた後に、それらの結論のつながりについて考察するなど、生徒が拡張的に統合することができるような授業展開を考えていきたい。

#### 参考文献

- [1] 文部科学省, 中学校学習指導要領(平成29年告示) 解説 数学編, p.7, p.47, 日本文教出版, 2018.
- [2] 湯本武司, 「フローチャート」を用いて証明の学習・指導を改善する, 日本数学教育学会誌, Vol.89 (7), pp. 22-28, 2007.
- [3] 茅野公穂, 学校数学における証明をよむ活動に関する研究: よむ対象に応じた三つの側面に焦点をあてて, 数学教育学論究, Vol.95 (RS), pp. 225-232, 2013.

令和4年4月1日 受理







# Teaching Argumentation with Proof Reading in Secondary School Mathematics

Masato MASUBUCHI, Takaaki TAKANO,  
Masaya OOTSUKA, and Takashi KAWAKAMI et al