

FDTD法を用いた誘電体球状共振器の共振特性の解析

松 原 真 理

宇都宮大学教育学部紀要
第65号 第2部 別刷
平成27年(2015)3月

An Analysis of Resonance Characteristics of a Dielectric Spherical Resonator by the Finite Time Domain Method

MATSUBARA Mari

FDTD法を用いた誘電体球状共振器の共振特性の解析

An Analysis of Resonance Characteristics of a Dielectric Spherical Resonator by the Finite Time Domain Method

松原 真理

MATSUBARA Mari

A spherical resonator operating on WGM (whispering gallery mode) have high unloaded Q factor, and is expected that it plays important roles in various fields. In this paper, resonance characteristics of a dielectric spherical resonator are analyzed by using a FDTD (finite difference time domain) method. As a result, the frequency was in good agreement with the experimental results. In addition, the appearance of the behavior of the electromagnetic field inside the resonator so far did not know was revealed, and Relationship between the two kinds of resonance orders were revealed.

キーワード：WGM、誘電体球状共振器、FDTD法、共振モード

1. はじめに

ウィスパーリングギャラリモード (WGM) という周方向へ進行するモードを利用した球状共振器は近年通信の分野だけでなく医療で使うレーザーなどでも注目されている^[1]。WGMにおいて電磁エネルギーは共振器周縁の狭い範囲に集中するため金属筐体で遮蔽することなく高いQ値を得ることができる。本研究者は、20年以上前からWGM誘電体共振器の研究を行っており^[1他]、球状共振器の共振特性を電磁理論的及び実験的に解析してきた^[2他]。私達のこれまでの研究で、エッジを持たない構造の為、理論解析に近似を含まない。よって材料の複素比誘電率を正確に把握できる可能性が高い。

しかしながら、電磁界の共振モードの生起の仕方が電磁理論的には分からなかった。そこで、誘電体球状共振器の固有共振モードにおける磁界の空間的及び時間的推移を調べることで、どのようにして共振モードが生起するかを明らかにすることを本研究の目的とする。今回、近年コンピュータの著しい発展に伴って可能となったFDTD法 (差分時間領域法)^[3]を用いて解析を行い、誘電体円板共振器の共振モードの磁界分布を解析する。その結果を、可視化することにより誘電体球状共振器の固有共振モードがどのようにして生起するかを明らかにする。

2. FDTD法を用いた共振周波数の計算

2.1 モデリング

FDTD法を用いた数値計算では、共振器と、それを取り巻く空間のモデリングが重要になる。

まずは実際の実験の様子を図1に示す。実験では、直径が90.0 [mm]の球と幅、厚さともに7.0 [mm]、長さ490.0 [mm]の導波路を用いる。これをモデリングの寸法図を図2に示し、詳細仕様を表1に示す。図2の右側の図が、実験装置を上から見たもの(xy断面とする)である。左側の図

が右から見たもの（yz断面とする）とする。

これらの数値をもとに誘電体球状共振器の解析領域の基本設定を行う。コンピュータ環境の都合上0.7 [mm] セルでモデリングを行う。なお材質であるテフロン及び、空気中の比誘電率はそれぞれ2.05、1.00とする。

波源は50GHzのガウス波を用い、検波ポイントで検出された出力データと、別に実行したキャブレーション用のデータに高速フーリエ変換を施し、周波数のスペクトル表示にし磁界強度を算出する。これらの計算にはFORTRANで作ったプログラムを用いた。なお今回はTEモードについてのみ結果を記す。なお球座標系は付録に示す。

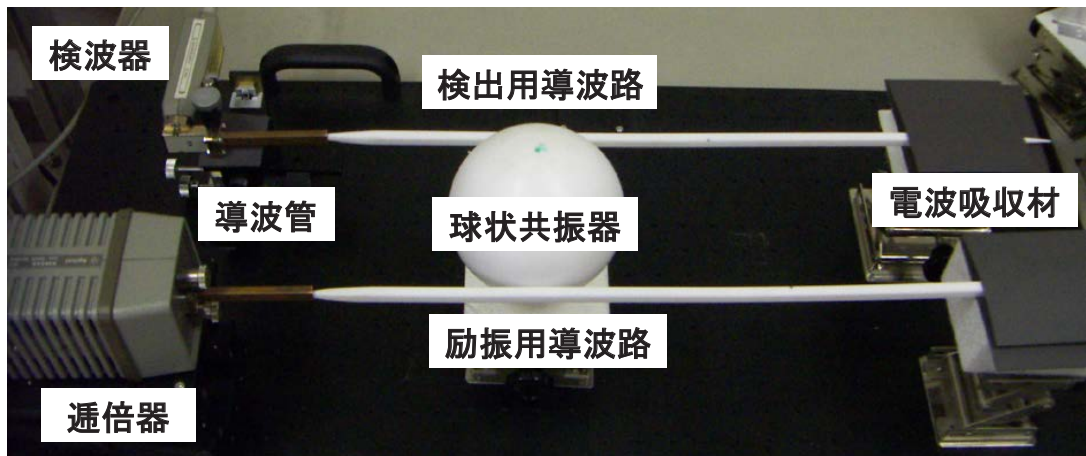


図1 誘電体球状共振器の実験

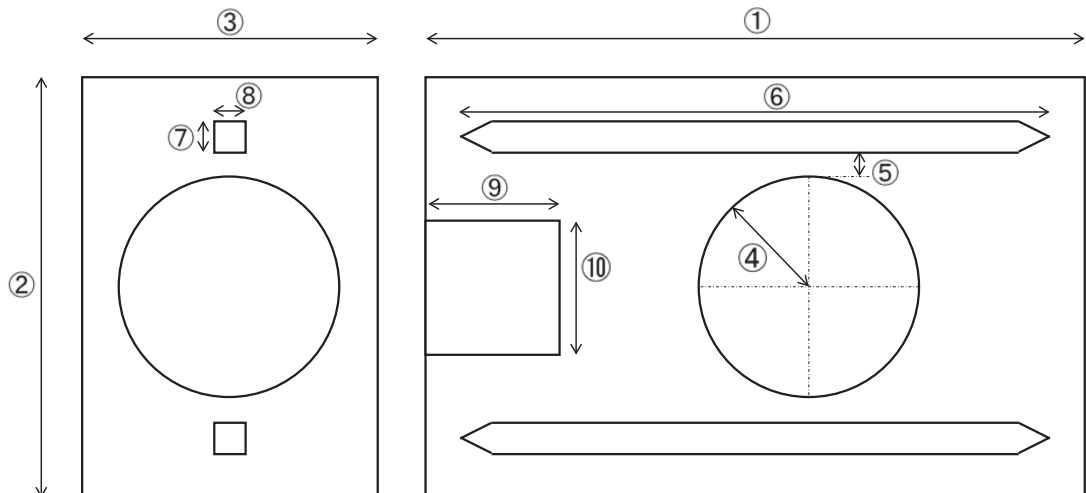


図2 モデリング寸法図

表1 モデリングの詳細仕様

	寸法 [mm]	セル数 [cell]
①フィールド横： n_x	520	740
②フィールド縦： n_y	190	270
③フィールド高さ： n_z	125	178
④球体直径：diameter	90	128
⑤球体、導波路との間隔： d	2.1	3
⑥導波路 長さ	490	700
⑦導波路 幅	7	10
⑧導波路 厚さ	7	10
⑨吸収体 横	200	286
⑩吸収体 縦	77	110

2.2 計算結果

20 [GHz] から40 [GHz] までの周波数と透過磁力の関係をグラフに表したものを図3に示す。

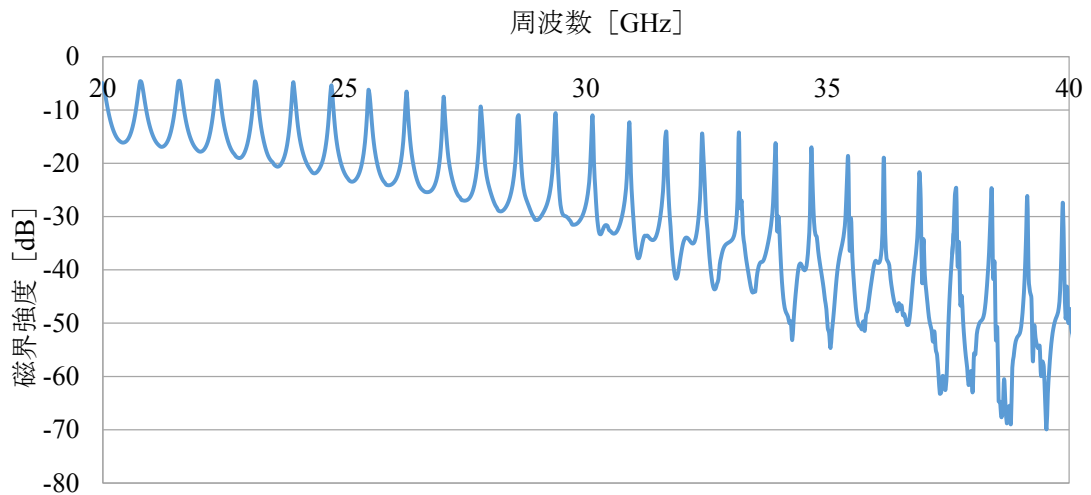


図3 誘電体球状共振器の共振周波数解析結果

この図で磁界強度が大きくなっているところが共振周波数である。同じ寸法で行われた実験値^[4]と計算結果を比較したところ、誤差の最大値は1.53%、最小値は0.04%、平均値は0.76%となった。以上より、FDTD法での解析結果は実験値と非常に近い値であるといえる。また、周波数が高くなるにつれて、誤差が小さくなることが分かった。なお共振次数の実験値に関しては、3.2節で述べる。

3. 磁界成分の可視化

3.1 主モードと高次モード

WGMには主モードと高次モードが存在することが実験結果から分かっている []。FDTD法で

の周波数特性を表した図3の一部を拡大したものを図4に示す。共振周波数36.900GHzの近傍の36.984GHzでも電界強度が大きくなっている部分がある。これが高次モードであると思われる。それぞれのモードについて磁界成分の可視化を行った。なお磁界成分の可視化は、周波数を一定にし、可視化したい領域の成分のみ計算をする。

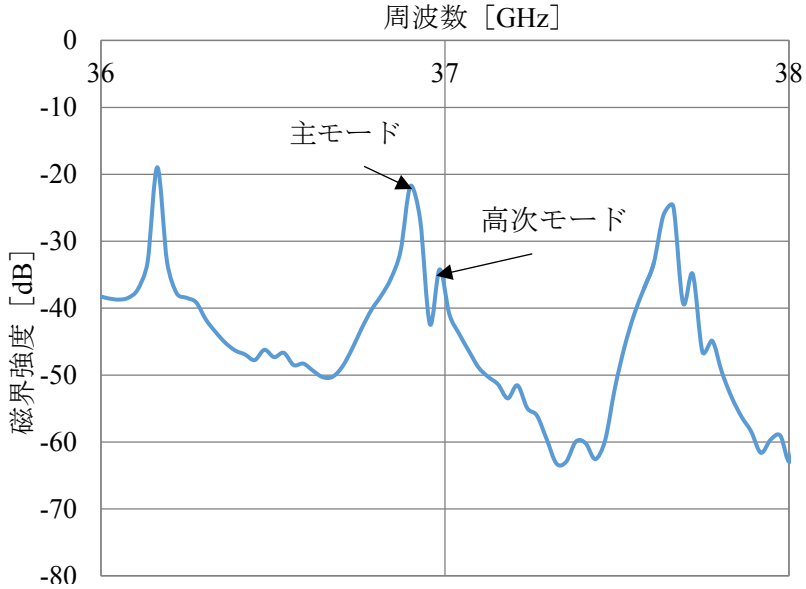


図4 共振周波数特性 (一部拡大)

3.2 主モードでの磁界成分の振る舞い

36.899541GHz、300ステップ (時間ステップを 1.0785×10^{-9} としている) 目の磁界の振る舞いを図5、6に示す。

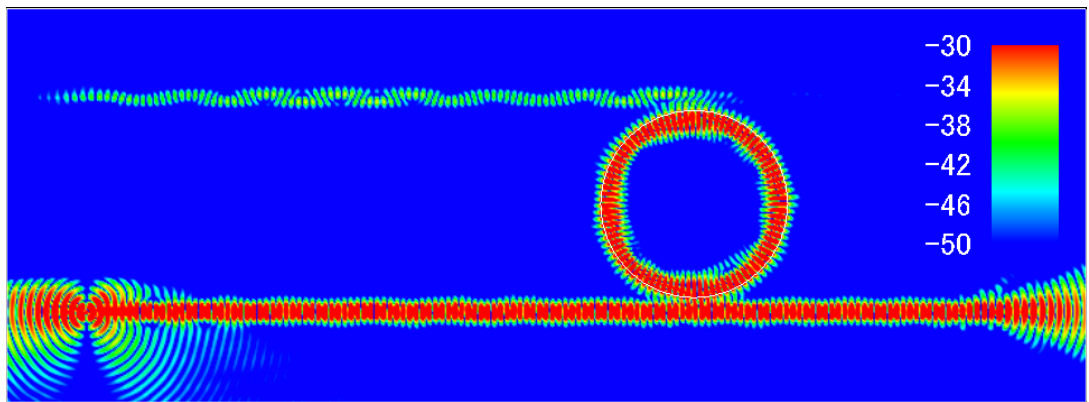


図5 固有モードのxy断面での電磁界の振る舞い

この図で左下側に波源があり、球状共振器にエネルギーが乗り移り、共振器内で巡回しながら図中上側にある検出用導波路にエネルギーが移動していくのが分かる。また共振器内の波が88個あ

るのが確認された。よって ϕ 方向の共振次数は44と確認できる。これは実験で得られた値と一致する。

図6はyz平面の磁界の振る舞いである。図の左側に入力用導波路、右側に検出用導波路がある。図から分かるように、エネルギーは導波路がある $\theta = 90^\circ$ 付近だけに集中し、他の部分には存在しないことがわかる。

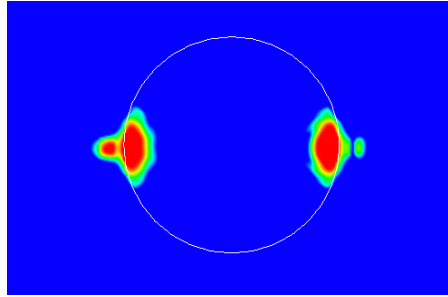


図6 yz平面における磁界分布

なお参考の為に、同じ緒元の球状共振器で磁界分布を測定した結果を示す^[3]。

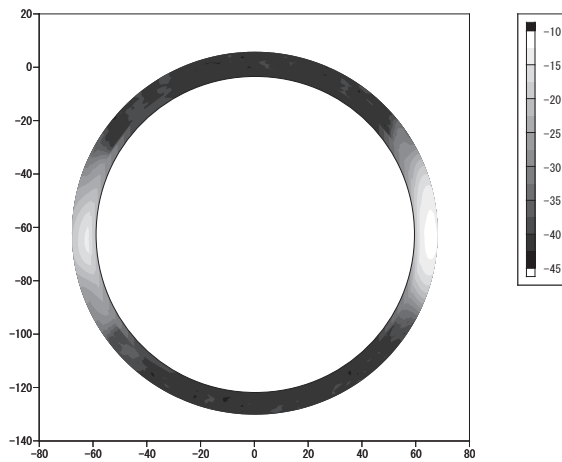


図7 yz平面における磁界分布（実験値）

この図は、yz平面における磁界分布である。白い所が磁界が強くなっているところである。FDTD法と同様 $\theta = 90^\circ$ の近辺だけエネルギーが存在していることがわかる。後で説明するが、この状態を極値1とする。なお共振器内部については測定不能である。

図8は ϕ 方向の一部の電界強度を測定した図である。横軸が周、縦軸は電界強度を表している。電界強度が強い部分が波の数になる。よって一周（ 360° ）に渡って電界強度を測定し、波の数の半分を周方向共振次数 m とする。この測定により36.899541GHzでの m は44となった。

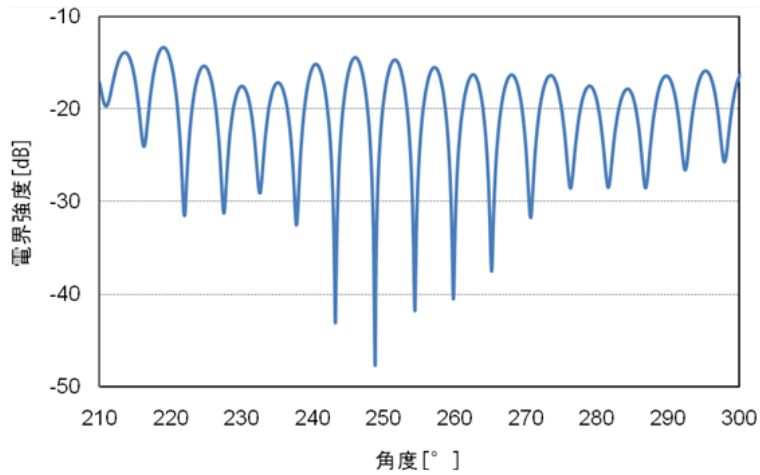


図8 ϕ 方向での電界強度

3.3 高次モードでの磁界の振る舞い

36.984GHz GHz、300ステップ（時間ステップを 1.0785×10^{-9} としている）目の磁界の振る舞いを図9、10に示す。

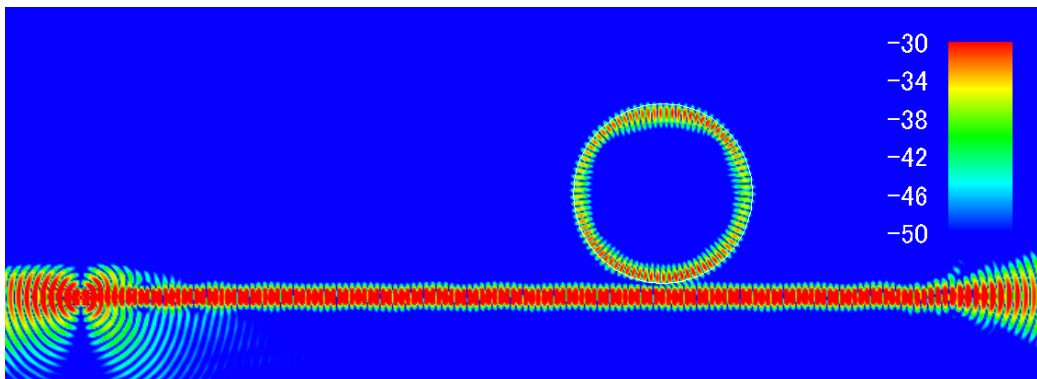


図9 高次モードのxy断面での電磁界の振る舞い

図より、共振器へエネルギーの乗り移りが少なく、検出用導波路にも乗り移ってないことがわかる。なお共振器内の波の数は84であり ϕ 方向共振次数は42ということになる。図7はyz平面における磁界分布である。図よりz方向に長く3か所にエネルギーが分布していることがわかる。

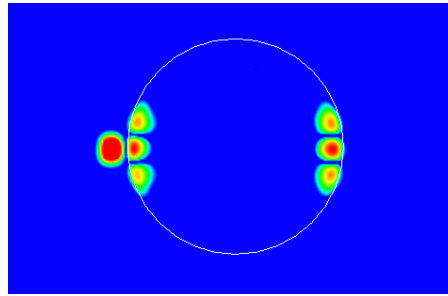


図10 yz平面における磁界分布

主モードと同様、共振器近傍の電磁界分布を測定しようと試みたが、エネルギーの漏れが小さいのか測定不能であった。

3.4 モードの同定について

これまでの本研究室の研究により、WGM誘電体球状共振器の共振次数は二種類存在することが分かっていた^[5]。一つは ϕ 方向共振次数 m と、 θ 方向共振次数に関する次数 n であった。これは電磁界表示式を定義する際のLegendre陪関数に起因する。この関数は $0 \sim \pi$ の範囲に $n-m+1$ 個の極値を有する関数であり、常に $n \geq m$ の関係がある。

式(1)はTEモードの球状共振器の固有値方程式である。

$$-k_l \cdot j_n \cdot h_n^{(2)} + k_r \cdot j'_n \cdot h_n^{(2)} = 0 \quad (1)$$

$$\text{ここで } j_n = j_n(k_r a), \quad j'_n = \frac{\partial}{\partial(k_r r)} \{j_n(k_r r)\} \Big|_{r=a}, \quad h_n^{(2)} = h_n^{(2)}(k_l a), \quad h_n^{(2)'} = \frac{\partial}{\partial(k_l r)} \{h_n^{(2)}(k_l r)\} \Big|_{r=a}$$

$$k_r = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}, \quad k_l = \omega \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_l}, \quad \omega = 2\pi(f_{\text{real}} + jf_{\text{imag}})$$

とする。

この式は、共振器の内側と近傍の界の表示式をマクスウェル方程式から導出し、境界での連続性から求めたものである。界の表示式には、 ϕ 方向共振次数 m が存在するが、固有値方程式は n だけになってしまう。 m は実験値から求まるが、 n はこの時点では想像するしかなかった。また先述したように、高次モードでの共振器近傍の電磁界測定は、エネルギーの漏れが弱く測定不能であり、 m と n が実験値から分からなかった。

FDTD法の計算結果より主モードの場合、図4より ϕ 方向共振次数 $m=44$ である。極値は1なので $n-m+1=1$ 、つまり $n=m=44$ となる。高次モードの場合は、図より $m=42$ であった。極値は3とすると $n=44$ である。このようにFDTD法により、 m と n の関係が明らかになった。

4. まとめ

本研究ではWGモード誘電体球状共振器の共振特性をFDTD法を用いて明らかにした。共振周波数は同じ諸元を持つ共振器での実験結果と比較したところ、よく一致した。周波数特性の図から、実験結果と同様、主モードと高次モードが存在することも明らかになった。

それぞれのモードで磁界分布を計算したところ、主モードでの周方向共振次数は実験結果と一致

した。またyz平面での磁界分布も極値が1であることも一致した。高次モードの磁界の振る舞いもFDTD法を使って明らかにした。これはエネルギーの漏れが弱く実験では測定できなかった部分である。実験やこれまでの電磁理論的研究では分からなかった ϕ 方向共振次数 m と、 n の関係が明らかになった。

今後は球状共振器の導波路との間隔を変えたモデリングを行いFDTD法で共振周波数特性を計算する。その結果からQ値を算出し導波路の最適配置場所を決定する予定である。

参考文献

- [1] 将来のナノレーザーへの道を開くプラズモン「ウィスパリングギャラリー」マイクロ共振器 (米国), NEDO海外レポート NO.1039, 2009.2.25
- [2] 松原真理, 亀山雄児, 古神義則, 苫米地義郎: 誘電体球状共振器を用いた誘電体材料の複素比誘電率の測定法に関する検討, 電子情報通信学会論文誌, C, Vol. J 90-C, No.3, pp.216-222, 無線通信を支えるマイクロ波・ミリ波高機能材料とその関連技術特集号, 2007.3
- [3] 宇野亨: FDTD法による電磁界及びアンテナ解析, コロナ社, 1998
- [4] M.Matsubara, Y.Kogami and Y.Tomabechi: A Method for Evaluating a Complex Permittivity of Dielectric Material by Using Whispering Gallery Modes on Spherical Resonator, Proceeding of 2006 Asia-Pacific Microwave Conference pp.1575-1578, 2006.12.
- [5] 細谷巧: 球状共振器を用いた複素誘電率の算定に関する研究, 宇都宮大学教育学部教員養成課程教科教育コース技術教育専攻卒業論文, 2008.3

付録

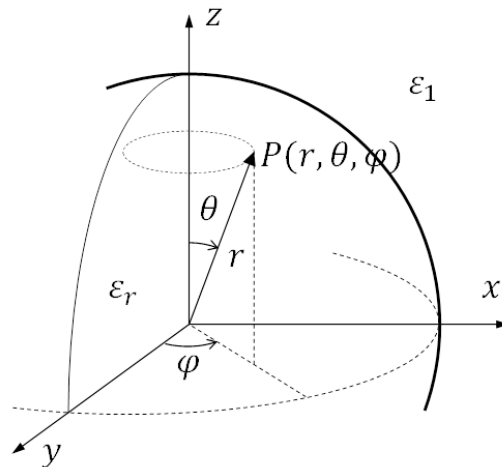


図 球座標系