異なる問題場面における生徒の比例の式の扱い †

―「比例」学習前の中１生徒への筆記調査から―

日野　圭子 *
宇都宮大学教育学部 *

本稿の目的は，中学校で「比例」を学習する直前の生徒（88 名）に対して行った筆記調査の結果の一部を報告することである。調査では，比例の式を使うことを求める問題場面を意図的に作り出し，生徒の反応を調べた。その結果，生徒の比例の式の扱い方として，次のような傾向を確認することができた。(ⅰ) 比例の式や比例定数は，具体的事象とはあまり結びついていない。（ⅱ) 生徒の式の扱いは，式のかたちに影響されている。（ⅲ) 生徒の中には比例定数を，２量の間の普遍的な関係を表すというよりは，特定の２つの量の間の関係を表すものとして捉えている者がいる。(ⅳ) グラフにおいては，ｘとｙの関係があまり意識には上がってはおらず，比例定数は一方の量と同一視されている。

これらの傾向には，関数に対する生徒の「操作的な考え」を見ることが出来る。本稿の最後には，結果に基づいて，操作的な考えを出発点としながら，生徒の考えの中に垣間見られる「構造的な考え」へと向かっていく側面を指導において活用していく手立てをいくつか述べた。

キーワード：算数・数学科教育，比例，式，「操作的な考え」と「構造的な考え」

1.　はじめに

比例の考えは，日常生活や社会生活で使われる他，科学の分野での重要性，進んだ数学を理解する支柱としての重要性などから，その指導は数学教育における大きな関心事[1)]である。一方，子どもは幼い時分から，素朴ながらも２量の変化に対する推理を行っている[2)]ことが知られている。子どもは学校での指導を通して，素朴な推理をより逞しいものに変容させていると考えられる。この変容の過程はどのような特徴を持っているのだろうか。筆者は，授業で導入される比例に関わる様々な数学的表記に注目し，数学的表記への子どもなりの意味づけを考察することによって，子どもの比例の考えの変容を捉えようと試みてきている。[3)4)5)]

比例に関する数学的表記は，異種の量の除法の式（(道のり)÷(時間)）や，比の表記（Ａ：Ｂ）などを含めて広く捉えられるが，主なものとしては，数表，式，グラフを挙げることができる。数表，式，グラフは，小学校及び中学校の比例の指導において扱われる。本稿では，比例の式について，生徒がどのように理解し，使っているかを調べることを目的として行った筆記調査の結果を報告する。

本調査の目的は，生徒の比例の式の使い方を調べることであるが，特に，比例定数（y=ax の a）について，この時期の生徒の理解の実態に関心がある。比例定数は，ｘとｙの間の比例関係を特徴づける普遍量であり，この値によって，２変数の関係が決定する。比例定数は，次節で見るように，小学校から中学校への比例の指導の接続における要の１つである。また，以後に生徒が学んでいく一次関数とも関わりが深く，これらの関数の性質としての重要性を持っている。尚，小学校において比例定数は，その名称こそ登場はしないが，単位量あたりの大きさや比例といった内容の中で扱われている。

調査は，小学校での比例の学習は終えているが，中学校での比例は未習である生徒（以下，「移行期の生徒」と呼ぶ）を対象に行った。調査を通して，移行期の生徒の比例の式，そして比例定数についての理解の実態を知り，その後の指導を計画する上での情報を得ることを意図している。

† Keiko HINO*: Students' Use of Equation of Proportion in Different Problem Situations.
* Faculty of Education, Utsunomiya University

2. 研究の背景

(1) 比例の学習指導の接続性における式

大谷ら[6] は，小学校と中学校の比例の学習指導の接続性について，次のように述べている。

> 小学校では，正の有理数の範囲で，比例の一般的な諸性質を見出すことが主要な学習内容となっている。.... 小学校では，数表を通した比例の学習が中心となるように思われる。
>
> 中学校の比例の学習指導では，数表の重要性は軽減され，それに代わり式が優勢となる。.... 中学校の比例では，式が優勢となり，式を組織化原理として単元全体が組み立てられる。(pp. 14-15)

中学校では，「比例 y=ax は…」という表現が使われ，式が比例の諸性質の中心として扱われる。大谷らは，その理由を，

(ア) 中学校では，扱う数の範囲が，負の数を含めた有理数全体へと拡張されるため，小学校のような内比に基づく比例の定義では，表現が極めて複雑になる，

(イ) 式を用いることで，比例を関数として捉え，関数の世界へと入っていく機会を与える，

(ウ) 式 y=ax は，すべての対(x, ax)からなる集合を意味し，個々の数量ではなく，それらに共通する一般的な構造を顕在化する。伴って変わる２変数全体において成り立つ一般的な数量関係を対象として考察するという関数の考えを高めていくことが目指される，

のように，整理している。

このような理由から扱われる式であるが，それは当然生徒に対しても，複雑な思考過程や理解の深まりを要求することになる。大谷らは，三輪[7] を引用し，関数の積極的な利用という立場からは，「投影」と「働き」が重要になると述べる。前者は，ある事象を別の事象によって見ることであり，後者は，関数がどんな性質を持ち，どんな構造を保つかを考察することである。

変化する数量全体において成り立つ不変的で一般的な性質を見出したり，その性質を問題解決のために考察，利用したりする力は，生徒の関数の考えの発達を捉える際にも議論されてきている。Sfard[8] は，数学の概念は構造的（対象）と操作的（過程）という２つの根本的に違う仕方で捉えることができると述べる。「構造的な考え」(structural conception)とは，数学的な概念を，ある抽象的な対象（どこかに存在するリアルなモノ）として扱う考えであり，「操作的な考え」（operational conception）とは，対象よりもプロセス・アルゴリズム・アクションについての面を捉えたものである。前者は，概念の静的（永遠）・瞬間的・統合的な側面を，後者は，動的・系列的・詳細な側面を捉えていると言う。

Sfard は，関数については，順序対の集合，計算プロセスとしての記述を，それぞれ「構造的な考え」と「操作的な考え」に挙げている。[9] そして，両者の相補的・不可分な関係を強調しつつも，数学的対象における操作的なオリジンを指摘している。関数を例とするなら，初期の関数の考えは，ある数値を入れると答が出てくるアルゴリズムであって，個々の数値について考えられ，一時的な構成物でもある。それが，徐々に短縮・成熟し，変形を１つの完全な活動として考えることができるようになっていくと，ある特徴をもった１つの統合的な実体になっていくと言う。大谷らが上で述べる(イ)や(ウ)は，構造的な考えにつながるものである。

また，Slavit[10] は，生徒が関数の操作的な理解に，より不変的で対象を志向した考えを取り込んでいく筋道を整理し，既存の研究を，対応の見方に注目した研究と変化の見方に注目した研究とに区別している。そして，変化の見方（ｘとｙの伴った変わり方）の中でも，変化の結果である関数の性質を強調した「性質志向 (property-oriented)」の考えを提案している。生徒が，共通の関数的な性質（対称性，周期性，傾き，切片，変曲点等）[11] について徐々に意識をし，やがて，様々な表現で表された関数を，そうした性質のあるなしによって認識したり，分析したりすることが出来るようになるところが，関数の考えの発達において重視されている。ここで，関数的性質には，線形のスロープ等，特定の関数に共通なものや，対称性のように幾つかの関数に一般化できるものが含まれる。

本稿では，これらの先行研究に拠りながら，中学１年の生徒に見られる比例の考えを捉えていく。本稿で述べていく生徒は，関数的な考え方を小学校で多少学んで来ているに過ぎない。彼らが，比例の式という，大谷らが述べるような一般的な構造を顕在化する表現様式をどのように捉え，扱うのかを，幾つかの問題場面を通して見ていきたい。

(2) 比例の式についての生徒の理解

比例の式についての生徒の理解は，様々な課題解決の場面で顕在化する。ここでは，比例の式を作るという面と，比例の式を使うという面から，幾つかの先行する調査を参照する。

比例の式を作ることを求める課題には，具体的な事象から式を作るもの，与えられた表から式を作るもの，与えられたグラフから式を作るものがある。そして，どれも多くの生徒にとって難しい。例えば，平成 13 年度の教育課程実施状況調査[12)]では，小学校第６学年に，自動車が使ったガソリンの量と進んだ道のりの関係を表す表から，ｘとｙの関係を表す式を求める問いがある。通過率は 44.8%であり，設定通過率を大きく下回った。平成 15 年度の同調査では，中学校第１学年に，グラフから比例の式を求める問いがあるが，通過率は 38.8%となっている。

国宗ら[13)]は，階段図形を使った具体的な関数の課題解決場面における中学１年生の考え方を調べ，生徒の立式に至るまでの理解のステップを推察している。そこでは，表を作って考える，更に，表を縦横に見たりして関数の変化や対応の特徴を捉えるというステップを経て，式に表現することができるようになると述べられている。また，比例の関係について，具体的場面からの立式と表からの立式では，「表から立式できる→具体的場面で立式できる」という理解の深まりの一面があると述べている。

比例の式を作ることを求めてはいないが，課題を解決する場面で，生徒が比例の式を作ったり使ったりすることが解決に貢献するような問題もある。例えば，国宗ら[14)]は，２つの数量の関係が表，文章，グラフのそれぞれで与えられた場合に，その関係が比例か反比例かそのどちらでもないかを判断するという問題を使って，小６～中３の生徒に調査を行っている。比例関係にある対応表からの判断では，正答率は，各学年とも 90%を越えていた。その中で，比例であることを判断するために，y=ax という式の形を使った生徒の割合は，学年が上がるに従って上昇するものの，中３でも約 40%であった。小６，中１では，倍関係によって判断した者が約 40%となっていた。比例関係が具体的な事象（文章）で与えられた場合に，式を使って判断した者は，小６から中２ではそれぞれ全体の 1/4 であった。グラフによって比例関係が与えられた場合には，生徒は，式を使うことなく，直接にグラフの特徴から判断をしていたようである。しかし，傾きが１より小さいと反比例と判断したり，原点を通らない右上がりの直線を比例と判断したりと，グラフについての生徒の理解が極めて直感的であったことが確認されている。

礒田ら[15)]は，事象の問題解決に際しての関数の考えの変容を，小中高の児童・生徒を対象とした調査によって調べている。具体的な事象において，２量の関係（比例関係）を見出し，その理由を記述することを求める問いでは，比例という言葉を使ったり，言葉の式を利用したりした解答は，小６～中２で増大しているとされているが，文字（x，y，△，□）式による解答は，殆ど見られないことがわかる。

また，全国学力・学習状況調査を参照してみると，平成 19 年度の中学校（第３学年）の問題に，水を熱したときの水温の変化を調べるもの[16)]がある。水を熱し始めてからの時間と水温の関係を，２分ごとに 10 分後まで描き入れたグラフをみて，それを一次関数とみることが出来るとした上で，「このまま熱し続けると，80℃になる時間は何分後か」を，グラフを伸ばす以外の方法で求める問題である。この問題の解答は，大きく，式を用いることについて記述している場合と，表や数値を用いることについて記述している場合とに類型化され，反応率が調べられた。それによると，正答率は約 40%であり，その中で，式についての記述があったものは，約 23%であった。

これらの調査研究が示すのは，生徒は，自発的に式を使って課題の解決をしない傾向にあるということである。式を作り出すことにおいても，式を使うことにおいても，生徒にとっては困難が大きく，消極的な傾向がある。また，生徒が式を使う力は，中学校３年生になると伸びてくるということも，複数の研究が指摘している[17)]ことである。

(3) 調査の意図

本研究では，移行期にある生徒の，比例の式や比例定数についての理解の様子を捉えることに関心がある。そこで，比例の式を使うことを求める問題場面を意図的に作り出し，そこでの生徒の反応を調べることにする。問題場面は，先行研究と同様に，具体的な事象についての課題解決の場面，表についての課題解決の場面，グラフについての課題解決の場面を区別して考える。

尚，上記の先行研究の結果が示すように，生徒は積極的に式を使おうとはしないことが予想されるた

め，比例の式を敢えて問題文中に提示し，その式を使うことが必要となるような問いかけをする。それによって，生徒の比例の式の使い方を顕在化させたい。また，現行のカリキュラムでの，移行期にある生徒の文字式についての学習の程度を配慮し，比例の式としては，○と△を使った式を提示する。(但し，問４は，教育課程実施状況調査の問題を使っており，そこでは，ｘ，ｙが使われている。)

本稿で分析する４つの問い（後述）における出題の意図は次の通りである。

問４では，表が与えられた状況で，表をよんだり，式やグラフを作ったりした後で，(4)の課題を解決するために，生徒がどのような道具を使うかを捉える。

問５では，具体的な事象についての場面で，式をどう使うかを捉える。比例の式が与えられているときに，生徒はその式を，具体的な場面に照らして，どのように解釈するだろうか。

問６では，表についての課題解決の場面で，式をどう使うかを捉える。表の穴埋めをするときに，与えられた式を使うかどうかに関心がある。

問７では，グラフについての課題解決の場面で，式をどう使うかを捉える。グラフと式の対応づけをするときに，生徒は，式をどのように解釈するだろうか。

3.　調査の対象と問題

(1)　時期：2007年９月～10月

(2)　対象：栃木県内公立中学校２校の１年生88名

(3)　方法：数学を担当する教師に依頼して，筆記調査を実施してもらった。実施時間は第Ｉ部，第Ⅱ部をあわせて，どのクラスも約50分であった。

(4)　調査問題：

第Ｉ部：「混み具合」についての問題

第Ⅱ部：比例についての問題

問１～問３．

比例で思い浮かぶこと，比例の例，比例とは何かを記述する。

問４．

ガソリンの量と進んだ道のりを表す下の表に関して，以下の問いに答える。[18)]

ガソリンの量(ℓ)	0	5	10	15	20
道のり(km)	0	75	150	225	300

(1)使ったガソリンの量が２倍になると，進んだ道のりはどのようになりますか。

(2)ガソリンの量をｘℓ，道のりをｙkm とします。ｘとｙの関係を表す式を書きましょう。

(3)ガソリンの量と道のりの関係を表すグラフを書きましょう。

(4)自動車が使ったガソリンが 50 リットルの時，この自動車は何km進んだことになりますか。

問５．

幸太君とさくらさんが，次の問題を一緒に考えています。

比例する２つの量（○と△）を，考えてください。
ただし，△÷○＝４になるようにして下さい。

幸太　：比例する２つの量を考えたよ。

さくら：へえ，どんなの？

幸太　：こんなふうに（下のような図をかいて〔図は省略〕)，直方体の形をした水そうに水を一定の割合で入れていくんだ。そのとき，水を入れる時間と水面の高さは比例しているよ。だから，○を「水を入れる時間」，△を「水面の高さ」にしたらいいよ。

さくら：なるほど，比例しているわね。でも△÷○＝４にしないといけないでしょう。

幸太　：あ，そうそう。だから

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

としておかないとね。

さて，幸太君は何と答えたでしょうか。上の□に，幸太君が言ったと思うことを書いてください。

問６．

下の表で，△は○に比例しています。○と△の関係は，0.6×○＝△と表すことができます。表のあいているところ(あ)～(か)に，あてはまる数を書きましょう。どのようにして求めたのかも書いてください。

○	0	1/3	4	5	6.2	(お)	15
△	(あ)	(い)	(う)	3	(え)	5.4	(か)

問７．

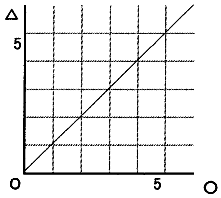
下の（ア）（イ）（ウ）はそれぞれ，（１）（２）（３）のどのグラフになるでしょうか。対応するもの同

士を，線で結んでください。また，そのように考えた理由を書いてください。[19)]

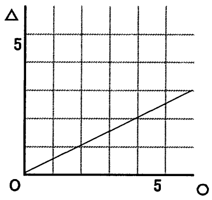
（ア）0.5×○＝△　　　　（イ）1.5×○＝△

（ウ） 1 ×○＝△

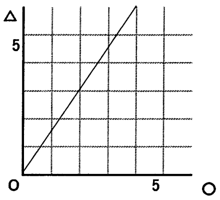
（1）



（2）



（3）



4. 調査結果と考察

本節では，第Ⅱ部の問題の中から，問４～問７についての結果を報告する。

(1) 各問に対する正答率

表１は，問４～問７の正答率を示している。問５は，「１分間に４cm ずつたまるようにする」といった記述，また，多少単位などが違っていても「～ずつ，～毎」を使う等，一定のたまり方に言及がされていれば正解とした（表２の◎，○)。問６及び問７は，全問正解の場合を正答としている。

表１　問４～問７の各問に対する正答率(%)

問	問 4(1)	問 4(2)	問 4(3)	問 4(4)
正答率	83.0	21.6	65.9	71.6

問	問 5	問 6	問 7
正答率	6.8	20.5	54.6

表１が示すように，問いによって正答率に大きな違いがあった。問４(1)や(4)は高く，問５は低かった。以下では，各問についての結果と考察を述べていく。

(2) 課題を解決するために道具を使う

問４(1)～(3)の全国での通過率（教育課程実施状況調査では小学６年生が対象）は，80.1%，44.8%，66.0%であった。表１の正答率をみると，本調査に協力してくれた生徒達は，全国での傾向と類似の傾向にあることが分かる。比例の表が与えられたときに，「２倍」という関係を表から指摘することはできても，表を式やグラフに表すこと，特に，式に表すことが際立って難しかった。

問４(4)において，生徒が使った道具が表，式，グラフのどれであったかを，生徒の答案からわかる範囲で拾い出してみると，半数以上の生徒が，与えられた表の数値の関係を読み取って，利用しているようであった。問４(2)で作った式（15x=y 等）を使い，x に 50 を代入して y を求めた解答は少なく，６%（５名）に過ぎなかった。(2)の正答率が低いため，この結果は当然であろう。一方，問４(3)で作ったグラフを利用した解答は皆無であった。

また，表の中の数値のどのような関係を生徒が使ったかを，within 方略（50÷5=10，75×10=750 のように，表の横の関係を使うもの）と，between 方略（150÷10=15，50×15=750 のように，表の縦の関係を使うもの）とに分類してみた。すると，within 方略は約 38%，between 方略は約 27%となり，ややwithin 方略の方が多いことが分かった。小学校では，表の横の関係を使って比例が導入されることもあり，横の関係への注目が多いのではないかと予想していたが，生徒は，縦の関係へも比較的自然に着目しているようである。

(3) 場面に照らして式をよむ

問５は，△÷○＝４という式を，水槽に水を入れる場面に照らして解釈することを求めている。生徒の記述を見ることで，生徒がこの式，特に「４」を，どのように解釈しているかを捉えようとした。「１分間に４cm ずつたまるようにする」のように，「４」を水が貯まっていく割合として記述することができた生徒（正答）は約 7%であった（表１)。△÷○＝４の式を，具体的な場面に当てはめて解釈をすることは，生徒にとってはかなり難しかった。これは，「４」という比例定数を，具体的な場面に照らして読むことの難しさを示している。

それでは，生徒は「△÷○＝４」をどう解釈したのだろうか。表２は，生徒の記述にコードを振って分類した結果を示している。

表２　問５での生徒の記述の分類と割合

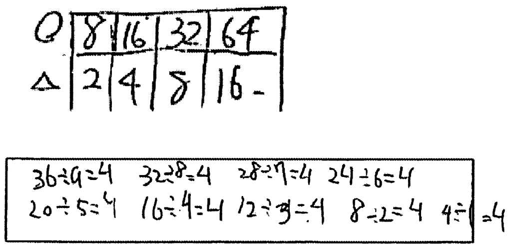
記述の様式	割合	例
言葉	6.8%	◎「1 分間に 4cm ずつたまるようにする」等
		○「1 分間に入れる水の量を 4 リットル」等
		○「一定」等が入ったその他の記述（「水の量を一定に」）
	4.5	「水面は時間の４倍」等
		「水槽の高さを 4cm，水を入れる時間を 1 分にする」等
表	2.3	表を書く
言葉の式	4.6	「水面の高さ÷水を入れる時間=4」等
○△の式	14.8	「４×○＝△」等
		「△÷４＝○」等の間違った式
数字の式	9.1	「36÷9=4, 32÷8=4, …,4÷1=4」のように複数の式を書く
		「8÷2=4」のように１つの式を書く
	18.2	その他
	39.8	「わからない」あるいは無答

生徒は，様々な様式で記述を行っていた。言葉による記述の他には，○△の式による記述が多く，また，数字の式や言葉の式による記述も見られた。「わからない」や無答以外で最も多かったのは，△÷○＝４を△＝４×○などの式に変形するものであった。具体的な場面においての解釈とはなっていない。彼らは，「４」を，式の操作によって，△と○の関係として捉えようとしていた。８%がこうした記述であり，間違った関係が捉えられているものを含めると，15%がここに相当した。

言葉の式による表現や，「水面は時間の４倍」といった表現からは，△と○に直接に対応する言葉を当てはめて回答している様子が伺える（約６%）。こうした回答も，具体的な場面に照らした解釈にはなり得ていない。

また，表２を見ると，言葉あるいは数字の式を使って述べている場合であっても，△と○の間の関係を，△と○の値が変化しても成り立つ一般的な関係として捉えようとしているか，特定の値についての関係として捉えようとしているかという違いがあることが分かる。「水槽の高さを 4cm，水を入れる時間を 1 分にする」「水面の高さが 20cm のとき，水を入れる時間は５分」といった記述，あるいは，「8÷2=4」や「20÷5=4」のような１つの数字式による記述では，特定の値についての関係が述べられている。このような特定の値についての関係が述べられている解答は，約 13%であった。

図１　生徒による一般的な関係の表現例



一方，△÷○＝４を，変わりうる△と○の値に対して成り立つ一般的な関係として捉えていることが分かる解答は９%であった。一般的な関係を捉えようとする場合，それをどのように表現するかは多様であった。「～当たり」「～ずつ」といった言葉を使ったり，図１の例が示すように表を作成したり複数の数字式を並べたりと，生徒の苦心が伺えた。

(4)　表を埋めるために式を利用する

問６は，表を埋める問題である。その際，○と△の関係を表す式を予め与えることによって，生徒が，その式をどのように利用するかを捉えようとした。全問正解の割合は約 20% (表 1)であった。予想以上に，低い結果となった。表３は，生徒の解答にコードを振って分類した結果を示している。

表３　問６での生徒の記述の分類と割合

記述の様子	割合
0.6×○＝△への代入が見られる	14.8%
0.6(3/5)で掛けたり，割ったりする	31.8
その他	6.8
「わからない」あるいは無答	43.2
答のみ	3.4

生徒のやり方を分類してみると，「0.6×○＝△」の式を使ったことが見取れるものは約 15%であった。

式の使用がはっきりとは見られないが，0.6（3/5 に変形をした生徒はいなかった）を掛けたり割ったりしているものは，約32%であった。約半数の生徒は，0.6 を，表の○と△の関係として使っていたことが分かる。正答率が低いことには，その関係を正しく使えるかどうか（求める数値によっては 0.6 で割ることが必要になる），正しく計算が出来るかどうか（分数の計算）が影響を与えていた。

このように，表を埋めるという場面における生徒の比例定数の理解は，問５に比べるとしっかりとしているようである。但し，0.6 を表の縦の関係として自在に扱う（特に割ること）という点では，課題も見られた。

(5) グラフと式を対応させながらよむ

問７は，与えられた３つのグラフと３つの式との対応をつける問題である。生徒は，グラフの傾きが異なることと，式の中の数字が異なることから，この２つの間に何らかの関係があると考えるであろう。そこでの生徒の反応から，生徒が「0.5」「1」「1.5」をどう捉えているかを見ることを意図した。全問正解の割合は約 55%であった（表１）。比例のグラフの扱いは，小学校ではあまりされていないが，生徒はそれなりに考えてくれていた。

表４　問７での生徒の記述の分類と割合

記述の様子	割合
「0.5」等を，グラフを通る点として捉えている	23.9%
「0.5」等を，グラフの増え具合として捉えている	12.5
その他	9.1
不明	2.3
「わからない」あるいは無答	52.3

生徒の記述を見ていくと，「0.5」「1」「1.5」をグラフと対応させて捉えたことが読み取れるものは約36%であった。それらからは，生徒が「0.5」「1」「1.5」を，グラフを通る点として，あるいは，グラフの増え具合として，捉えていることが分かる。また，「その他」に分類された記述の多くは，曖昧な表現（例えば，「グラフを見ていくとどれもアイウにあてはまっているから」「式とグラフが対応しているから」）であったり，角度（「アは角度が低いから」）やその他の幾何学的な特徴（「右肩上がり」や「伸び」）を述べたものであったりした。表４はそれぞれの生徒の割合を示している。

表５は，「0.5」「1」「1.5」を，グラフを通る点として捉えていることが読み取れる記述を，更に分類したものである。また，表６は，グラフの増え具合として捉えていることが読み取れる記述を，更に詳しく分類したものである。

表５　「0.5」等を，グラフを通る点として捉えている記述の更なる分類と割合

記述の様子	割合
「0.5」等が，グラフ上の点の座標の関係であることに言及している	13.6%
「0.5」等が，グラフ上の点の座標の関係であることに言及していない	10.2
計	23.8

表６　「0.5」等を，グラフの増え具合として捉えている記述の更なる分類と割合

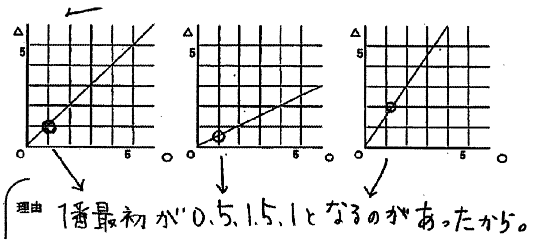
記述の様子	割合
「１行くと 0.5 増える」等，変化の割合に言及している	1.1%
「0.5 増える」等，変化の割合に言及していない	8.0
「ウはぴったりマス目に沿って線が引いてある，アはそれより下，イはそれより上」等，増え具合の大小を言葉で説明している	2.3
「□×○＝△の□が大きい方が急なグラフ」等，知識を述べている	1.1
計	12.5

表５が示すように，「0.5」「1」「1.5」を，グラフ上の点と対応させている記述は，大きく２つのタイプに分けられた。１つは，「0.5」「1」「1.5」が，グラフ上の点の座標 (p, q) が満たす関係であることに言及をしているものである。例えば，（ア）0.5×○＝△と（２）のグラフが対応することを，「（ア）なら 0.5×5=2.5。その５の位置に 2.5 があるのは（２）だから」と説明しているものや，「（ア）は○に１を代入して，0.5×1=0.5 で，グラフの１のところに 0.5 が来ているやつが正解なので（２）」と説明しているものが，ここに相当する。

他の１つは，そのような関係に言及をしていないものである。例えば，（ア）と（２）が対応することを，「１目盛りが１だから，半分の0.5になるから」という記述である。この生徒は，（２）のグラフ上の点（１，0.5）について述べていると考えられるが，ｙ座標 0.5 だけを記述しており，ｘ座標とｙ座標の関係については，特に述べられていない。「（２）は 0.5 を指しているから（ア）」という記述も，ｙ座標の 0.5 だけが述べられている。このように，ここの分類に属する記述では，点（１，0.5）（１，１）（１，1.5）を指摘しているものの，点のｙ座標のみを取り出している点に特徴がある。ｘ座標について，あまり意識に上っていないようである。

また，生徒の記述の中には，「0.5」「1」「1.5」をグラフが格子点と最初に交わる点と捉えているものがあった。例えば，図２のような例である。

図２　問７の記述例



一方，表６が示すように，「0.5」「1」「1.5」を，グラフの増え具合に対応させている記述は，概ね４つのタイプに分けられた。第１のタイプは，「１行くと 0.5 増える」等，変化の割合に言及しているものである。第２のタイプは，「0.5 増える」「0.5 ずつ増える」といった記述であり，変化の割合にまでは言及していないものである。このタイプでは，「ｘが１増えると，ｙが 0.5 増える」ことを表現しようとしていると考えられるが，前半部分が省略されているため，記述が曖昧になっている。ｙの増加量のみを取り出しているという点で，表５の後者のタイプと類似している。やはり，ｘについては，あまり意識に上っていないことがうかがえる。第３のタイプは，「ウはぴったりマス目に沿って線が引いてある，アはそれより下，イはそれより上」等，「増え具合の大小」を言葉で説明しているものであり，第４のタイプは，「□×○＝△の□が大きい方が急なグラフ」「比例の大きい方が急なグラフ」等，知識を述べているものである。第３，４のタイプでは，「0.5」「1」「1.5」という数値がグラフの何処に見られるのかは，述べられていなかった。

以上をまとめると，

・　生徒は式の比例定数を，グラフを通る点，あるいは，グラフの増え具合として捉えている，
・　グラフを通る点として捉える場合，その点のｘ座標についての意識が薄いもの，グラフの特定の点を指しているものがある，
・　グラフの増え具合として捉える場合，ｘの増加量についての意識が薄い記述や，一般的な形に始終している記述がある，

ということが分かる。

5.　まとめと今後の課題

本稿では，異なる場面における課題解決の場面で，生徒がどのように比例の式を扱うのかを捉えてきた。生徒の反応から，移行期にある生徒の，比例の式や比例定数に対する捉え方の一端を確認することができる。

第１に，比例の式や比例定数は，具体的事象とはあまり結びついていない。これは，水槽の問題に対する生徒の反応が顕著に示している。問いかけがうまくなかった点もあるが，「わからない」，無答などの反応が，40%を占め，また，提示された式を変形させた解答が 20%に上った。具体的な場面に照らして，式を解釈するということの意図が理解されなかった結果となった。「１分間に４cm ずつ」といった表現，あるいは，「～当たり」「～ずつ」といった表現が，なかなか生徒からは出てこなかった。小学校において，単位量当たりの大きさは，混み具合や速さの学習において，割合の学習において，比や比例の学習において，あるいは，乗除の学習において扱われているが，それを，比例の式の解釈に結びつけることは難しかった。

第２に，生徒の式の扱いは，扱う式のかたちに影響されている。表の穴埋めの問題では，式を使おうとする生徒であっても，その式を正しく適用して，表の上段の値を求めることは難しかった。掛け算のかたちで与えられた式を，割り算のかたちに変形することが難しかったのである。水槽の問題が難しかった理由にも，式が，割り算のかたちであったことがあるかもしれない。

第３に，生徒の中には，比例定数を，２量の間の

普遍的な関係を表すというよりは，特定の２つの量の間の関係を表すものとして捉えている者がいるということである。実際，上で述べてきたように，水槽の問題では，△と○の間の関係を，△と○の値が変化しても成り立つ一般的な関係ではなく，特定の値の関係として捉えている解答が確認された。また，グラフと式の対応づけの課題では，「0.5」「1」「1.5」を，グラフが通っている最初の点と考えている解答が見られた。

第４に，生徒の比例定数の捉え方は，グラフの増え具合というよりは，グラフを通る点としての捉え方であること，また，いずれにおいても，ｘとｙの関係があまり意識には上がってはおらず，一方の量と同一視されている傾向にあるということである。相対的な関係ではなく，ある絶対量を表しているようである。

こうした生徒の比例の式や比例定数の扱いには，２(1)で述べた「操作的な考え」を見ることが出来る。ある数値を，与えられたアルゴリズムやきまりによって，別の１つの数値へと導くという，計算の側面（水槽の場面で生徒が書いた様々な割り算の式，式の様々な変形，表やグラフの点を確かめる計算など）が見られるためである。また，比例定数を，個別な数値についての関係と見たり，グラフが通っている最初の点，あるいは，ある絶対的な量として扱ったりしている様子が観察された。そこにも，一時的，非永続的なものとしての見方，即ち，操作的な考えが見られる。

関数について殆ど学んでいない本稿の生徒に操作的な考えが見られたことは，当然なことでもある。生徒は，こうした考えを出発点として，今後，比例をはじめとする一連の関数の学習によって，徐々に構造的な考えを取り込んでいくことが期待される。その際，生徒の考えの中に垣間見られる，構造的な考えへと向かっていく側面を，活用していくことができるのではないだろうか。

第１に，生徒に見られる操作的な考えを，素朴で初歩的なものとして否定的に扱うのではなく，その考えを，関数（比例）の性質へと，関連づけていくようにしたい。例えば，問６では，式を使わずに表の数値の関係によって１つ１つを個々に考えて穴埋めをした生徒と，式を一貫して使った生徒がいた。同じ計算ではあっても，後者は比例定数という比例関係を特徴づける不変量を使っている。前者の生徒を認めながらも，両者を比べることで，式や比例定数を見直す機会を与えることができるだろう。また，問７では，「グラフが最初に通っている点」に注目をしている生徒が観察された。グラフは，静的な構造を示しやすい表現様式であるが，生徒のグラフの見方は，どちらかと言うと操作的であった。同じ最初の点を通っていても，違ったグラフは存在する。そうしたグラフを対比させることで，生徒の注意を，グラフ全体へと向けることができないだろうか。性質に目を向けていくには，幾つかの例，あるいは，異なる表現様式で表された例を，比較・対比することが大切[20]になる。授業の中に，そのような活動を取り入れていくことを考えてみたい。

第２に，生徒によってなされる様々な表現の仕方を，授業の中で活用していく[21] [22]ことも，生徒の操作的な考えを取り上げていく上で大切であると考える。問５で見てきたように，生徒は，２つの数量の間の一般的な関係を表す言葉や表記を，あまり使っていなかった。また，使った場合であっても，個人によって差があり，苦労をしている様子が見られた。「～当たり」や「～毎」といった言葉，表やグラフ，そして，式という表記を，生徒が考えあったり，話し合ったりする機会を設けていくことが大切である。そのために，具体的事象に照らして，式を解釈するような機会も取り入れていきたい。また，問７でも，「１増える」「0.5を通る」といった表現，また，より曖昧な表現が多数確認されている。こうした表現が，人に伝える上で，どのように曖昧であるのかを授業の中で取り上げることも，大切であろう。更に，比例定数に対する生徒の呼び方は，「直線が通っているところの数」「１つ目のところ」「１番最初」のように様々であった。こうした生徒の考えが現れた言葉にも，注意していきたい。

今後の課題の１つは，中学１年生の比例・反比例の学習指導において，比例定数に関わっての操作的，構造的な考えやそれに関わる言葉が，授業のどのような場面で出現するのかを調べることである。先行研究[23]では，生徒が発案した言葉と正式な言葉とが，授業の中で教師によって選別されて使われており，それが生徒の学習に影響を与えていると述べられている。操作的，構造的な考えが授業の中でどのように扱われるのか，生徒における受け止め方はどうなのか等について，今後調べていきたい。

付記

本稿は，『全国数学教育学会第 28 回研究発表会』（2008 年 6 月 28～29 日，広島大学）において発表された原稿を，加除修正したものである。

註及び引用・参考文献

1) Harel, G., & Confrey, J. (eds.). (1994). The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. State University of New York Press; Hiebert, J., & Behr, M. (eds.), (1988). *Number concepts and operations in the middle grades: Research agenda for mathematics education, vol. 2*. Reston, Virginia: NCTM.

2) Resnick, L., & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). LEA.

3) 日野圭子. (2008).「数学的表記の内化を促す文脈についての一考察」.『日本数学教育学会誌』, 90(4), 33-44.

4) 日野圭子. (2009).「子どもの授業中の問題解決における他者の影響」.『宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要』, 32, 61-70.

5) 日野圭子. (2010).「比例的推論の進展を促す数学的表記の探究による授業の開発と評価」『平成 19～21 年度科学研究費補助金・基盤研究(C)(2)研究成果報告書』.

6) 大谷実，中村雅恵. (2002).「中学校との接続性を配慮した比例の学習指導：文化ー歴史的活動理論に基づく教授実験のデザイン」.『日本数学教育学会誌』，84(6)，11-22.

7) 三輪辰郎. (1974).「関数的思考」中島・大野（編）.『数学と思考』(pp. 210-225). 第一法規.

8) Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

9) Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America, Notes Number 25.

10) Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 259-281.

11) 関数の性質では，幾つかの例を通して普遍な（invariant）特徴の認識が鍵となる。共通の関数的性質としては，大局的なもの（周期性や対称性など関数全体の振る舞いに関わる）と局所的なもの（切片や変曲点など個々の数値のペアに関わる）が区別され，また，成長に関わるもの（単調性や周期性）と対応に関わるもの（単写や定義域・値域）が区別されている。(Slavit, D., 1997, p. 265)

12) 国立教育政策研究所教育課程研究センター. (2003).『平成 13 年度小中学校教育課程実施状況調査報告書，小学校算数』. 東洋館.

13) 国宗進. (1987).「国宗進，関数の課題解決場面における子供の考え方」.「日本数学教育学会誌数学教育」，69(9)，4-12.

14) 国宗進・大坂誠・鈴木洋一・羽田明夫. (1996).「関数の課題解決場面での子どもの考え方」.『静岡大学教育学部附属教育実践研究指導センター紀要』，5，17-31.

15) 礒田正美・仕木廣・山中和人. (1990).「関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究：小中高にわたる発達と変容」.『日本数学教育学会誌』，72(1)，48-63.

16) 文部科学省・国立教育政策研究所. (2008).『平成 19 年度全国学力･学習状況調査:中学校報告書』

17) 前掲書 14) 15) を参照。

18) 問 4 (1)～(3)は平成 13 年度教育課程実施状況調査の問題を使っている。

19) 問 7 は「中村雅恵. (2001).『算数・数学的活動の質を考える:平成 12 年度金沢大学教育学部内地留学研修報告書』」を改変している。

20) 前掲書 10) を参照。

21) Moschkovich, J. (1998). Resources for refining mathematical conceptions: Case studies in learning about linear functions. The Journal of the Learning Sciences, 7(2), 209-237.

22) Davis, J. (2007). Real-world contexts, multiple representations, student- invented terminology, and Y-intercept. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(4), 387-418.

23) 前掲書 22) を参照。