

## P波とS波の分離が観察できるウェーブマシンの制作 †

赤澤 勉\*・松居誠一郎\*\*  
 栃木県立佐野女子高等学校\*  
 宇都宮大学教育学部\*\*

「波」は我々にとって見ることも聞くことも感じることもできるきわめて身近なものである。中学の地学分野においても地震波の「P波とS波」、そしてこれらの速さの違いが「初期微動継続時間」を発生させ、震源距離の目安となる事も学ぶ。高校の物理Iでは、地震波や音波などの具体的なものから「波」の性質を抽出し、考察していく。しかし、地学と関係する縦波については軽く触れられるだけであり、しかも横波に変換して話を進めていくため十分な理解がされていない。また、「P波はS波より速い」ということは何の疑問も持たずに受け入れられている。このことを理論的に考察することは高校の学習の範囲を大きく越えることであるが、こうした疑問を喚起し、新たな探求の道筋を開くことも重要であろう。しかし学校にある一般的なウェーブマシンではそれを視覚的に確かめることは難しい。そこで、縦波と横波の双方が観察でき、しかも縦波が横波より速く伝播する状況が視覚的に確かめられるウェーブマシンを試作してみた。

キーワード：教具開発，高等学校教育，ウェーブマシン，縦波，横波，ナヴィエ方程式

### 1. 研究の目的・方針

現代社会における情報処理技術の進歩は、多くの困難や高度な機器・技術を用いなければ観測できない事象や特殊な場所・環境・条件下においてのみ観察できる事象を仮想的に映像化し、誰にでもわかりやすく提示できるようになった。反面、感覚的かつ即時的に理解できるものばかり選んでいけば、思考は具体物操作的なままにとどまってしまうであろう。そこで具体物操作的思考を抽象的思考に高めていける題材を選び教材化していきたいと考えた。

次に、「地学」は、日本の立地条件や防災といった観点から考えても重要な科目であるにもかかわらず、隅に追いやられている。「受験科目としてほとんど実施されていない」、「教えられる指導者がいない」といった理由から、本県でも地学をカリキュラムとして取り入れている高校は数校しかない。こうした現状では、地学を科目として独立して教えることは事実上不可能である。そこで、地学分野を含む理科総合Bはもとより、物理・化学・生物といった理科の科目の中で、その科目の知識を習得させなが

ら、同時に地学的知識や思考力も養える教材の開発が必要であると考えた。

筆者の一人、赤澤は物理を中心に授業を行っている。物理の内容の中で「地学との関連」及び「具体物操作的思考から抽象的思考へ」という点に最もふさわしいものとして「波動」分野を選び、教材化の出発点とすべくウェーブマシンの試作を行った。

### 2. 装置の構造と分析

まず、図1のような構造を考え、理論的に分析してみた。

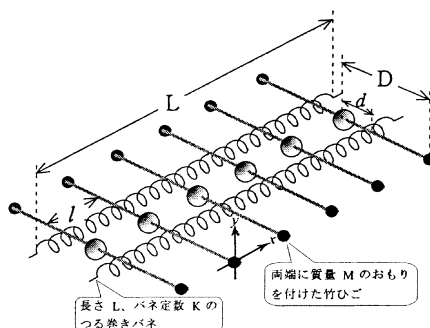


図1 初めに想定した装置

一様な棒の両端におもりを付け、重心を上下左右に動けるようにしたものをつる巻きバネを2本用意

† Tsutomu AKAZAWA\*, Seiichirou MATSUI\*\* :  
 Production of wavemachine that can observe separation of P wave and S wave.

\* Sano Girl's High School

\*\* Faculty of Education, Utsunomiya University

する。図1のように棒を等間隔で平行に並べ、重心の両側をバネに接着する。

## 2.1 多体系での縦波と横波の速さ

想定した装置での振動の様子を、図2のように表すことにする。

点  $p_n$  での釣り合いの位置からの変位を  $x$  と  $t$  の関数として表し、 $u(x_n, t)$  とする。

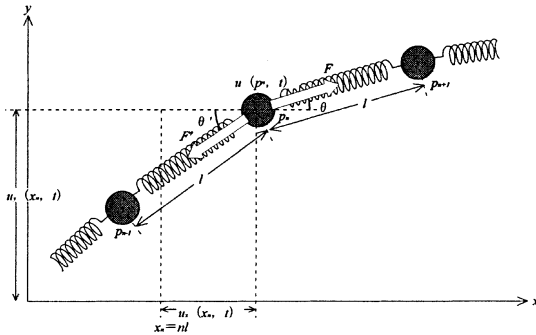


図2 多体系での波の様子

$p_n \sim p_{n-1}$  の間のバネと  $p_n \sim p_{n+1}$  の間のバネが、 $p_n$  の位置にあるおもりに及ぼす力  $F$  と  $F'$  は

$$F = k\{u(x_{n+1}, t) - u(x_n, t)\}$$

$$F' = k\{u(x_n, t) - u(x_{n-1}, t)\}$$

と書ける。

本来なら連成振動系として

$$m \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial t^2} = k\{u(x_{n+1}, t) - u(x_n, t)\} - k\{u(x_n, t) - u(x_{n-1}, t)\}$$

の  $n$  個の方程式をまとめて解かなければならないが、定性的・かつ簡明に考えるため連続体に近似して考察することにする。

変位の部分をテーラー展開すれば

$$\begin{aligned} u(x_{n \pm 1}, t) - u(x_n, t) &= u(x_n \pm l, t) - u(x_n, t) \\ &= \pm l \frac{\partial u(x_n, t)}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

である。三階以上の項は微少であるから無視すれば

$$F = kl \frac{\partial u(x_n, t)}{\partial x} + \frac{k l^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2}$$

$$F' = kl \frac{\partial u(x_n, t)}{\partial x} - \frac{k l^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2}$$

ここから、おもりに作用する  $x$  方向の力  $F_x$  と、 $y$  方向の力  $F_y$  は、三角関数の和積の公式を適用して

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta - F' \cos \theta' \\ &= kl \frac{\partial u_x(x_n, t)}{\partial x} \left( -2 \sin \frac{\theta + \theta'}{2} \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \\ &\quad + \frac{k l^2}{2} \frac{\partial^2 u_x(x_n, t)}{\partial x^2} \left( 2 \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= F \sin \theta - F' \sin \theta' \\ &= kl \frac{\partial u_y(x_n, t)}{\partial x} \left( 2 \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \\ &\quad + \frac{k l^2}{2} \frac{\partial^2 u_y(x_n, t)}{\partial x^2} \left( 2 \sin \frac{\theta + \theta'}{2} \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \end{aligned}$$

$\theta - \theta'$  が小さいとすれば、

$$\sin \frac{\theta - \theta'}{2} \approx 0, \quad \cos \frac{\theta - \theta'}{2} \approx 1 \quad \text{としてよいから、}$$

$$F_x = k l^2 \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} \cos \frac{\theta + \theta'}{2}$$

$$F_y = k l^2 \frac{\partial^2 u(x_n, t)}{\partial x^2} \sin \frac{\theta + \theta'}{2} \quad \text{と表せる。}$$

これをもとに運動方程式をたてれば

$$m \frac{\partial^2 u_x(x_n, t)}{\partial t^2} = k l^2 \frac{\partial^2 u_x(x_n, t)}{\partial x^2} \cos \frac{\theta + \theta'}{2}$$

$$m \frac{\partial^2 u_y(x_n, t)}{\partial t^2} = k l^2 \frac{\partial^2 u_y(x_n, t)}{\partial x^2} \sin \frac{\theta + \theta'}{2}$$

$$\text{波動方程式} \quad \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{と比較}$$

して波の伝播速度を求めると

$$v_x = \sqrt{\frac{k l^2}{m} \cdot \cos \frac{\theta + \theta'}{2}} \quad v_y = \sqrt{\frac{k l^2}{m} \cdot \sin \frac{\theta + \theta'}{2}}$$

となるが、 $\rho = \frac{m}{l}$ 、 $T = kl$  とおけば

$$v_x = \sqrt{\frac{T}{\rho} \cos \frac{\theta + \theta'}{2}} \quad v_y = \sqrt{\frac{T}{\rho} \sin \frac{\theta + \theta'}{2}}$$

と表せ、速さの最大値はどちらも張力  $T$ 、線密度  $\rho$  の弦を伝わる横波の速さと同じ形になる。

## 2.2 考察

以上の分析から、このようなタイプの構造では縦波と横波の速さはバネの水平面からの角度に依存して変化し、角度が小さければ縦波が速く、大きければ横波が速くなる。従って速度差を視覚的に観察するにはふさわしくないことが解った。

よって別の構造を考えるためには、実際の地震波

の P 波と S 波について考察する必要がある。それには連続体内の波について考えなければならない。

### 3. 連続体を伝える波

連続体を考察する場合、本質的な点を知るためには媒質が広いことと歪みや弾性について等方的であるという二つの仮定のもとで行う。実際の地殻は物理的性質の異なる岩石や地層などで構成され、上の条件を十分に満たしているとは言い難いが、これらを考慮すると論議が非常に複雑となってしまう本稿の目的とは乖離してしまうからである。

そこで以下では広い等方弾性体中の局所的な歪みと弾性力との関係、及びそれにより生じる波の伝播速度について考察していく。

#### 3.1 二次元での表現

式の煩雑さを避けるため、まず二次元で考える。等方であるとの仮定であるから、その結果はそのまま三次元に拡張できる。

図3のように、等方弾性体を等間隔で格子状に並んだ質点、同じ長さ・バネ定数のバネで連結されていると仮定する。

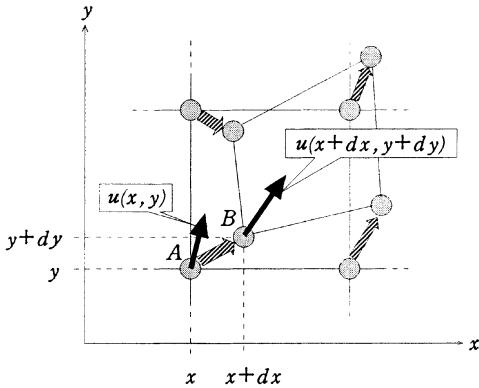


図3 弾性体の2次元歪み

点 A での歪み（ここではバネのつり合いの位置からのずれ+歪み）を  $u(x, y)$  で表し、点 B での歪みを  $u(x+dx, y+dy)$  で表すとす。ここで、  
 $u(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))$   
 $u(x+dx, y+dy) = (u_x(x+dx, y+dy), u_y(x+dx, y+dy))$   
と成分表示し、 $\overline{AB}^2$  を計算する。 $dx$  と  $dy$  は小さいとしてテーラー展開し、三次以降の項を無視する。

さらに計算過程で出てくる  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$  と  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$  も微少で

あるからこれらの二次の項も無視すると、

$$\overline{AB}^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}(dx)^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y}(dy)^2\right) + 2\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}dx dy + \frac{\partial u_x}{\partial y}dx dy\right)$$

と計算できる。

$(dx)^2 + (dy)^2$  は AB 間の質点の変位を表し、

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}(dx)^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y}(dy)^2\right)$$

は、x 軸・y 軸方向の伸びや縮み（図4）を、

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}dx dy + \frac{\partial u_x}{\partial y}dx dy\right)$$

は「ずれ」（図5）を表す。

このとき、伸びた方向と直角な方向にはそれに連動して縮む。前者を伸縮歪み、後者をずれ歪みと呼ぶ。

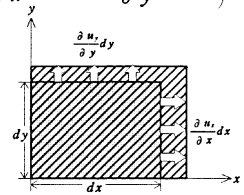


図4 伸びと縮み

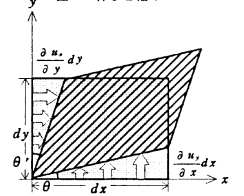


図5 ずれ

#### 3.2 行列とベクトル演算子による表現

ここで、次のような行列 E

$$E = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$$

を導入し、以下の計算をすると、

$$(dx, dy) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}(dx)^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y}(dy)^2\right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}dx dy + \frac{\partial u_x}{\partial y}dx dy\right)$$

となり、 $\overline{AB}^2$  の計算の後半部に対応することがわかる。ここで、 $dx$  と  $dy$  で囲まれた四角形の面積を  $dx dy = dS$  とすると、伸縮後の面積  $dS'$  は近似的に

$$dS' = \left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \cdot \left(dy + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) dx dy$$

であるから、面積変化  $\delta dS = dS' - dS$  は

$$\delta dS = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dS = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (u_x, u_y) dS$$

と書ける。右辺はハミルトン演算子  $\nabla$  (の二次元形) とずれの成分  $(u_x, u_y)$  の内積であるから、発散を用いて  $\delta dS = \text{div } \mathbf{u} dS$  と表せる。従って伸縮歪み

$$\text{を表す行列は } E_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ となる。さらに}$$

弾性体は等方的なので、伸縮率は向きで差がなく

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

という形への変形が可能だから、単位行列  $I$  と対角和  $\text{Tr}$  (トレース) を用いて

$$E_v = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\text{Tr} E) I$$

成分表示で  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$ : クロネッカーのデルタ),

$\text{div } \mathbf{u} = \varepsilon_{ii}$  である。

同様に考えればずれ歪みは行列表示で、

$$E_s = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \\ = E - E_v = E - \frac{1}{2} (\text{Tr} E) I$$

成分表示で  $\varepsilon_{sij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$  と書ける。

しかし、剛体回転 (図6) を表す行列は

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

であり、 $E$  から直接には作ることにはできないが、

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad D' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

という行列  $D$  とその転置行列  $D'$  を設定すれば、

$$E = \frac{1}{2} (D + D')$$

$$E' = \frac{1}{2} (D - D')$$

であるから、 $E'$  として作ることができる。

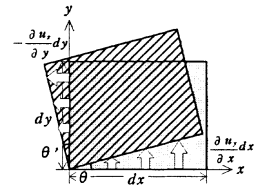


図6 回転

成分表示は、回転を用いて  $\text{rot } \mathbf{u} = 2\mathbf{e}'_{ij}$  となる。

### 3. 3 三次元への拡張とテンソル

以上の準備をもとにして、これらを三次元に拡張する。三次元化した  $D^{ij}$  を相対変位テンソルと呼ぶ。

$$D^{ij} = \frac{1}{2} (D^{ij} + D^{ji}) + \frac{1}{2} (D^{ij} - D^{ji}) \\ = E^{ij} + R^{ij}$$

$E^{ij}$  は歪みを表す対称テンソルで、等方的であるから一方向あたりの伸縮  $E^{ij}_v$  とずれ  $E^{ij}_s$  は、

$$E^{ij}_v = \frac{1}{3} (\text{Tr} E^{ij}) I \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$$

$$E^{ij}_s = E^{ij} - \frac{1}{3} (\text{Tr} E^{ij}) I \quad \varepsilon_{sij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$$

よって  $\text{div } \mathbf{u} = \varepsilon_{ii}$  である。

$R^{ij}$  は剛体回転を表す反対称テンソルで、

$$\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} = R^{ij} \text{ である。}$$

次に、弾性力を求めるため「歪みの場所による微分」を計算しておく。まず対角成分  $\varepsilon_{ii}$  ( $i = j$ ) の微分は、

$$\text{div } \mathbf{u} = E^{ii} \text{ より } \text{div } \mathbf{u} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \text{ だから}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \mathbf{u} = \nabla (\text{div } \mathbf{u})$$

それ以外の成分  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) は

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} \\ = \frac{1}{2} \left( \nabla^2 \cdot u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \mathbf{u} \right) \\ = \frac{1}{2} \left( \nabla^2 \cdot u_i + \nabla (\text{div } \mathbf{u}) \right)$$

であるが、公式  $\nabla^2 = \nabla (\text{div}) - \text{rot} (\text{rot})$  を用い

て  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \{2\nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u})\}$  と変形しておく。

### 3. 4 微小体積に作用する力の表現と運動方程式

以上の考察から、応力もテンソルと考えられるので、これを  $T^{ij}$  とする。歪みは  $E^j = E^{jv} + E^{js}$  と表せた。伸縮歪み  $E^{jv}$  は、 $xyz$  三方向の「膨張・収縮」の平均であるから三方向の影響を足し合わせる必要がある。すると応力は体積弾性率  $K$  を用いて  $3KE^{jv}$  となる。ずれ歪み  $E^{js}$  は、面の移動なので面に平行な二方向の「ずれ」の影響を足し合わせる。すると応力はずれ弾性率  $G$  を用いて  $2GE^{js}$  となる。

従って応力テンソルは

$T^{ij} = 3KE^{jv} + 2GE^{js}$  成分表示で

$$\begin{aligned} t_{ij} &= 3 \cdot \frac{1}{3} K \boldsymbol{\varepsilon}_i \delta_{ij} + 2G \left( \boldsymbol{\varepsilon}_j - \frac{1}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_i \delta_{ij} \right) \\ &= 2G \boldsymbol{\varepsilon}_j + \left( K - \frac{2}{3}G \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i \delta_{ij} \quad \text{と表せる。} \end{aligned}$$

$T^{ij}$  の場所による微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} &= 2G \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_j}{\partial x_j} + \left( K - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial x_j} \\ &= 2G \cdot \frac{1}{2} \{2\nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u})\} \\ &\quad + \left( K - \frac{2}{3}G \right) \nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) \\ &= -G \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \left( K + \frac{4}{3}G \right) \nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) \end{aligned}$$

これらを用いると、等方弾性体中の局所的な歪みによる応力  $F_{ij}(x_i, t)$  ( $i$  成分) は

$$F_{ij}(x_i, t) = t_{ij} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_j + \left( K - \frac{2}{3}G \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i \delta_{ij}$$

微小体積  $dV$  に作用する応力  $F_{ij}$  ( $i$  成分) は

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \Delta V \\ &= \left[ -G \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \left( K + \frac{4}{3}G \right) \nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) \right] \Delta V \end{aligned}$$

と表せる。運動方程式は、物体の密度を  $\rho$  として

$$\begin{aligned} \rho \Delta V \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} \\ = \left[ -G \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \left( K + \frac{4}{3}G \right) \nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) \right] \Delta V \end{aligned}$$

波動方程式の形式に変形して

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} \\ = \frac{1}{\rho} \left[ -G \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \left( K + \frac{4}{3}G \right) \nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}) \right] \end{aligned}$$

この式を、外力がない場合のナビエ方程式という。

### 3. 5 P波とS波の伝播速度の計算

伝播速度を計算するには、 $\mathbf{div} \mathbf{u} = S^i$  が伸縮歪

みを、 $\frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{u} = R^{ij}$  が回転を表すことを利用する。

まず、ナビエ方程式の両辺に  $\mathbf{div}$  を作用させると、右辺の大括弧の中は、

$$-G \mathbf{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u})) + \left( K + \frac{4}{3}G \right) \mathbf{div}(\nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}))$$

だが、 $\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0$ 、 $\mathbf{div}(\nabla \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_i^2}$

$$\text{より} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{div} \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left( K + \frac{4}{3}G \right) \nabla^2(\mathbf{div} \mathbf{u})$$

両辺の  $\mathbf{div} \mathbf{u}$  を  $u_p$ 、左辺の  $\nabla^2$  を  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  と書けば

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left( K + \frac{4}{3}G \right) \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} \quad \text{となる。}$$

これは体積歪みの波を表し、従って縦波である。縦

$$\text{波の速さは} \quad v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad \text{である。}$$

同様に  $\mathbf{rot}$  を作用させると右辺の大括弧内は

$$-G \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u})) + \left( K + \frac{4}{3}G \right) \mathbf{rot}(\nabla(\mathbf{div} \mathbf{u}))$$

だが、公式  $\mathbf{rot}(\nabla \varphi) = 0$ 、 $\nabla \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0$ 、

$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  より

$$\frac{\partial^2 \mathbf{rot} \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2(\mathbf{rot} \mathbf{u})$$

両辺の  $\mathbf{rot} \mathbf{u}$  を  $u_s$ 、左辺の  $\nabla^2$  を  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  と書けば

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \quad \text{となる。}$$

これはねじれ、あるいは局所的な微小回転の波を表

し横波である。横波の速さは  $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  であり、

ずれやねじれで発生する横波の場合と同じである。

以上の結果から、 $v_P$ と $v_S$ の大きさは $v_P$ の方が大きく、その倍率は $\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{K}{G} + \frac{4}{3}}$ である。ここに

$$K = \frac{1}{3(1-2\sigma)}Y \quad \text{と} \quad G = \frac{1}{2(1+\sigma)}Y$$

を代入して整理すれば $v_P = \sqrt{1 + \frac{1}{1-2\sigma}} v_S$ となる。

ポアソン比は $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ であるから、 $v_P$ と $v_S$ の倍率は、理論的には $\sigma = 0$ のとき $\sqrt{2}$ が最小、 $\sigma = \frac{1}{2}$

に近づくにつれて $\infty$ に発散することがわかる。

#### 4. 実験装置の改良

図7最上部のような構造では縦波と横波の伝播速度に差が出にくい。今までの考察から、縦波と横波に速度差ができるのは、《広い等方弾性体》の中という条件が必要である。しかも実験装置を考えた場合、ただか1m程度の距離で視認のできる範囲内の伝播速度と速度差を実現するには、ポアソン比の範囲に強い制限を与えなければならない。そのような物質を探すことは物理的にも費用的にも困難である。しかも連続体内の縦波と横波を観察するための仕組みも新たに考案しなければならない。そこで本研究では、

- ・身近に手に入る材料で安価に制作できる
- ・縦波が横波より早く伝播する様子を視認できるという2つの条件の実現に絞って装置を改良した。

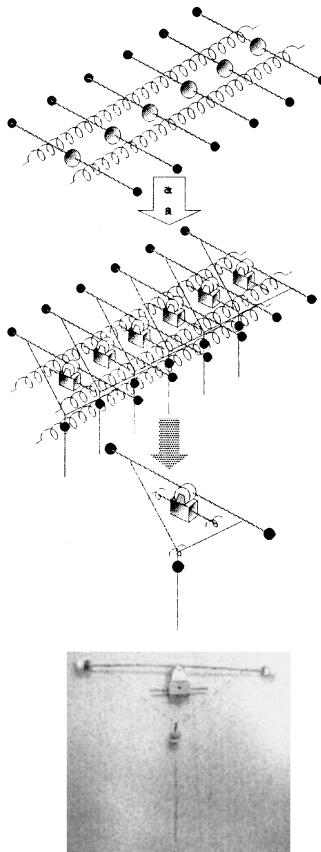




図7 装置の改良

#### 4. 1 材料

表1に示すように材料の全ては、ホームセンター、教材販売会社、100円ショップ等、身近で安価に購入できるものである。

表1 材料の規格・加工・個数

名称	規格	部品加工・個数等
竹ひご	φ3mm ×360mm 1.9g	360mm×11本 + 45mm×22本 
ころ	回転部: プラスチック φ25mm ×幅13mm 台座: 金属 底面横37mm ×幅18mm	回転部に切り込みを入れ、竹ひごが通るように加工したものの×11個 
ナット 【ネーマナットエコー】	W3/8-16mm 10.1g	中に粘土消しゴム0.7gを詰め、竹ひごが通るようにしたものの×22個 +単体11個 
波動実験用弦巻バネ 【Kenis製 横波用 樹脂製】	外径11mm 内径9mm 線径1mm 密度0.3g/cm	縦波用120mm×2 (+端12mm×各2) 横波用310mm (+端50mm ×2) 
樹脂製パッキン	外径20mm 内径5mm 1.1g	11個 
ゴム管 【釣りの外用】		約15mm×11個 
ローゼットワッシャー【M3】	外径9mm 内径3mm	11個 
ピアノ線 【#24×21】	φ0.55mm	720mmを二つに折り、折れ目から200mmのところを左右に折り開いてY字型にし両端10mmを竹ひごに密着できるようにしたもの 
シリコンゴム管	外径5mm 内径3mm	約10mm×44個 
発泡スチロール球	φ20mm 0.1g	22個 
鉄釘【#15】	φ約2mm ×長さ32mm	11本 
鉄球	φ5mm	11個 
タッピングネジ	φ3.5mm ×長さ10mm	22本 
バルサ材	20mm ×20mm ×900mm	38mm長に穴あけ加工したものの×11個  900mm×1本

## 4.2 改良点

最初の《おもり2個+バネ2個+上下左右に回転できる支点》の振動子では、2個のバネに縦波と横波双方の復元力の発生を担わせたため、明確な速度差が得られなかった。改良型では振動子を図8のように《おもり3個+バネ3個+上下左右に回転できる支点》とし、支点の両脇につけた2個のバネで縦波を、下につけたおもりの直上につけた1個のバネで横波を発生させるようにした。

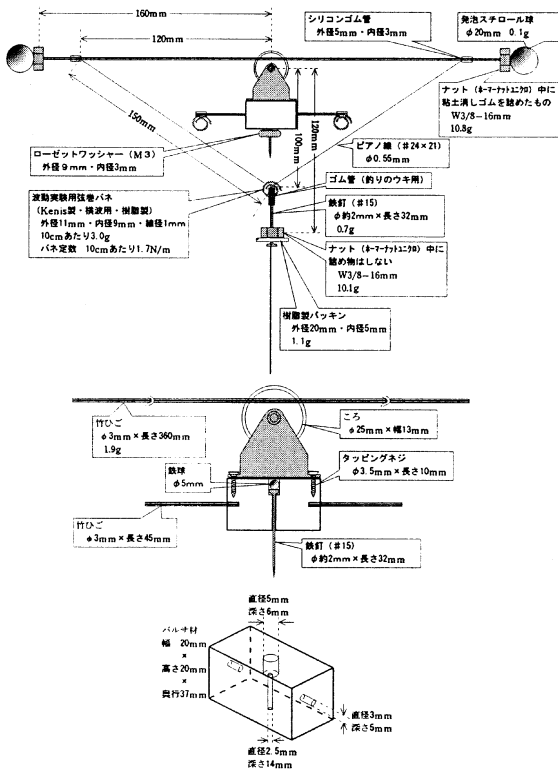
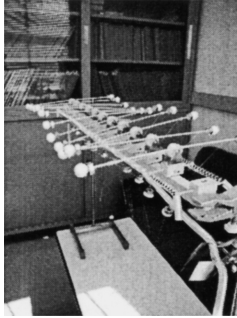


図8 改良した振動子

## 4.3 波の速さの

### 理論的近似値

速さに大きく影響するであろう部分のみを考慮し、2.1で導いた連続体近似をした場合の伝播速度を計算する式を用いる。伝播速

$$v = \sqrt{\frac{kL^2}{m}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

度の最大値  $v = \sqrt{\frac{kL^2}{m}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  を用いて速さの概算値を計算する。振動子は図9のような規格で、振動子間の間隔は70mm、全長  $l$  は10間隔で700mm、バネ定数  $k$  は測定から10cmあたり1.7N/mである。しかし、線密度に相当する値は、振動子とバネの慣性質量等から換算した。また、振動子はどちらの方向にも対称構造なので重力の影響は相殺されるので片側のみ考察。

縦波：y軸を回転軸に点Pのバネを復元力とする。

・点Pにおける慣性質量

$$10.9\text{g} \times \frac{160\text{mm}}{50\text{mm}} + 0.9\text{g} \times \frac{90\text{mm}}{50\text{mm}} = 36.5\text{g}$$

・バネの全長 1間隔12mm  $\times$  10間隔 = 120mm

・バネの質量  $3.0\text{g} \times \frac{120\text{mm}}{100\text{mm}} = 3.6\text{g}$

・線密度に相当する値

$$\rho_P = \frac{36.5 \times 10^{-3}\text{kg} \times 11\text{個} + 3.6 \times 10^{-3}\text{kg}}{700 \times 10^{-3}\text{m}} \approx 0.58\text{kg/m}$$

・バネ定数  $1.7\text{N/m} \times \frac{100\text{mm}}{120\text{mm}} \approx 1.4\text{N/m}$

・相当する張力  $T_P = 1.4 \times 70 \times 10^{-3} = 98 \times 10^{-3}\text{N}$

$$\text{よって伝播速度は } v_P = \sqrt{\frac{98 \times 10^{-3}}{0.58}} \approx 0.41\text{m/s}$$

実測値は約0.40m/sであった。

横波：x軸を回転軸に点Sのバネを復元力とする。

・点Sにおける慣性質量

$$11.9\text{g} \times \frac{120\text{mm}}{100\text{mm}} + \left(10.9 \times \frac{160\text{mm}}{100\text{mm}}\right) \times 2 + \left(0.9\text{g} \times \frac{90\text{mm}}{100\text{mm}}\right) \times 2 = 50.8\text{g}$$

・バネの全長 1間隔31mm  $\times$  10間隔 = 310mm

・バネの質量  $3.0\text{g} \times \frac{310\text{mm}}{100\text{mm}} = 9.3\text{g}$

・線密度に相当する値

$$\rho_S = \frac{50.8 \times 10^{-3}\text{kg} \times 11\text{個} + 9.3 \times 10^{-3}\text{kg}}{700 \times 10^{-3}\text{m}} \approx 0.81\text{kg/m}$$

・バネ定数  $1.7\text{N/m} \times \frac{100\text{mm}}{310\text{mm}} \approx 0.55\text{N/m}$

・相当する張力  $T_S = 0.55 \times 70 \times 10^{-3} = 39 \times 10^{-3}\text{N}$

$$\text{よって伝播速度は } v_S = \sqrt{\frac{39 \times 10^{-3}}{0.81}} \approx 0.22\text{m/s}$$

実測値は約0.24m/sであった。

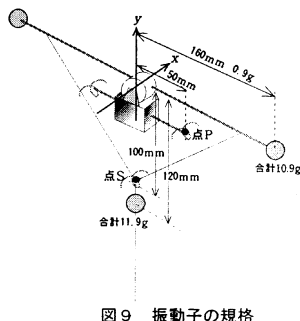
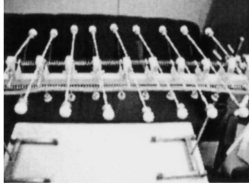
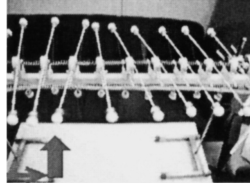


図9 振動子の規格

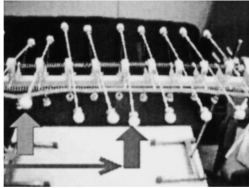
#### 4. 4 波の伝播の様子



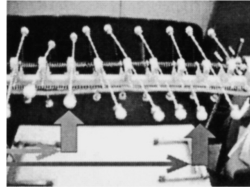
① 静止状態



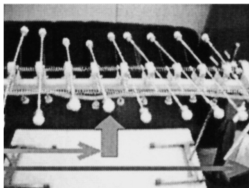
② 縦波到達



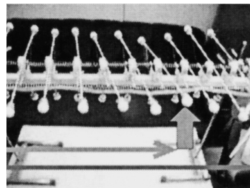
③ 横波到達



④ 横波と縦波



⑤ 縦波通過



⑥ 横波

発生源に近い振動子ほど軌跡はリサージュ図形に近い複雑な動きで、進行するにつれて縦波成分が先行していく様子が見て取れる。発生源から遠い振動子は最初水平方向に揺れ、そのあと鉛直方向に揺れる様子が確認できる。これらのことから、縦波が横波より速く伝わるのが視覚的に確認できた。

#### 4. 5 問題点

##### 構造的側面

##### 1) 加工精度が要求されること

穴の位置のズレや取り付け位置の違いがバランスの崩れを生み、スムーズな動きを妨げ、波を減衰させる。

##### 2) 剛性が必要であること

加工のしやすさを考えバルサ材と竹ひごを材料としたが、反りが出たり動かしているうちに穴が広がったりしてガタが生じ、摩擦や抵抗を生む。特に縦波は、構造的に横波のように復元力として重力が使えないため減衰が大きく、端から端まで到達させるのに苦労した。

##### 3) 材料の吟味が必要なこと

精度と剛性を確保でき且つ経済的な素材を探す必要がある。バネも身近で手に入るものは、バネ定数・大きさ・線密度・長さが限られており、条件に合うものを探すのは難しい。今回使用したバネも樹脂

製であるため変形が残りやすく、剪断方向の力が長時間加わった部分は破断しやすくなった。

##### 教具的側面

##### 1) 構造が複雑であること

使う材料も多く、加工や精度を出すにも工具や手間がかかり、それほど手軽に制作できるものではない。ローゼットワッシャや樹脂製パッキンなどは大規模店でないと手に入らないと思われる。

##### 2) 縦波と横波の分離の視認は困難であること

発生源に近くのリサージュ図形的な動きから縦波成分が先行していく過程はイメージしにくく、伝播速度と振動子の数・間隔といった装置の規格の関係もあり、この分離過程を視認することは生徒にとって難度が高いと思われる。

##### 3) 地震波の発生原理を用いていないこと

この構造は等方的連続体の伝播原理とは異なるため、「なぜ縦波が横波より早いのか？」という疑問に対する説明には用いることができない。

#### 5. まとめ

##### 成果

1) 同じバネを縦波と横波の両方の復元力に使うという構造では、縦波と横波の速度差はバネの水平面からの角度に依存して変化し、速度差を視認しにくいということが論理的に推定できた。

2) 広い等方性の弾性体について運動方程式（ナビエ方程式）を導き、地震波の縦波成分と横波成分の速度差を理論的に検証できた。

3) 以上の知見をもとに構造を工夫し、縦波と横波の速度差を視認できる実験装置を試作できた。

##### 今後の課題

1) 今回試作した構造での高精度・高剛性・簡易化を追求する。

2) 等方性弾性体、あるいはそれを近似できる構造を研究し、より現実の地震波に近い伝播状況を再現して視覚化する。

3) これらの教具をもとに、物理と地学双方の知識が得られる教材や授業展開を研究する。

#### 参考文献

- 1) 基礎物理学選書26 「連続体の力学」 佐野 理 裳華房
- 2) 「地震発生の物理学」 大中 康 豊 東京大学出版会