

理想断熱モデルを用いたスターリングエンジンの性能解析[†]

戸田富士夫*・中島 克彰*・磯野 高宏*
宇都宮大学教育学部*

スターリングエンジンの出力特性を予測するための性能解析法は、理想等温モデル及び理想断熱モデル(1-st オード法)、理想等温モデルあるいは理想断熱モデルに基づいたサイクル計算に、ガスの漏れによる損失、熱交換器内における作動ガスの流動損失や機械損失等々いろいろの損失を加味して、出力や熱効率などを計算する方法(2-nd オード法)及び熱流体の挙動を基本的に規定している物理学の3つの保存則、すなわち、質量保存則、運動量保存則及びエネルギー保存則より導かれる基礎式に、実情に応じた境界条件を与え、連立微分方程式を解く手法(3-rd オード法)等が提案されている。さらに経験式としての予測法には、ビール数及びウェスト数を用いた軸出力予測法が提案されている。

本報は教育用エンジンを対象として、その主要諸元を計算条件とし、 p - v 線図について理想断熱モデルと理想等温モデルについて比較検討する。さらにサイクル中のガス温度、図示仕事の変化及び熱交換器内仕事の変化について述べ、断熱モデルの有用性について報告する。

キーワード：外燃機関、スターリングエンジン、性能解析、図示出力予測法、断熱モデル

1. はじめに

断熱モデルを用いたスターリングエンジンの性能予測法は、連続の式及びエネルギー式を基本として連立微分方程式を数値解法を用いて解かねばならない。したがってシミュレーションには Fortran, Basic 及び C 言語等を用いて解析するのが一般的であるが、本報では汎用性を考慮して Excel に組み込まれているマクロを用いて数値解析法を試みた¹⁾。このことによって Excel の利用者には簡単に初期条件さえ与えれば断熱モデルの解析を行うことができる。断熱モデルによる解析は T. Finkelstein²⁾により最初に提案されたものであるが、本報では I. Urieli³⁾らによる解析法について概説し、理想断熱モデルを用いたスターリングエンジン性能予測並びに理想等温モデルを用いた性能予測法との比較・検討について考究する。

2. 理想断熱解析モデル

等温モデルでは、圧縮・膨張両空間及び冷却器、再生器、加熱器の各熱交換器は、等温状態に保たれてると仮定した。その結果、外部との交換熱量は圧

縮・膨張両空間で全て仕事に変換され、本来、外部との熱交換器をつかさどるべき冷却器、加熱器といった熱交換器は、サイクルには全く関与しないという矛盾した結論が導かれる。

一方、実際のエンジンでは、圧縮・膨張両空間の伝熱面積は冷却器や加熱器の伝熱面積に比較して一般に小さく、したがって、圧縮・膨張両空間では熱の授受はほとんど行われないと考えるほうがより現実的である。

このような観点に立って、圧縮・膨張両空間は断熱されていると考えるのが断熱モデルである。このことによりエンジン内での熱交換過程の把握がある程度可能となり、再生器を含む熱交換器がサイクルに果たす役割が明らかになる。このモデルも等温モデルと同様、スターリングエンジンの解析を行う場合の基本モデルの一つとなる。

2.1 解析モデル

図1は断熱モデルを行うための基本的なエンジン解析モデルである。図2にその温度分布を示す。等温モデルと同様、エンジンは5つの要素に分割されている。ただし、このモデルでは各熱交換器内のガス温度は等温として取り扱うが、圧縮・膨張両空間は外部と断熱されていると仮定する。再生器温度の取り扱いや他の仮定は、等温モデルと同一である。

[†] Fujio TODA*, Katuaki NAKAJIMA* and Takahiro ISONO*: Performance Analysis of Stirling Engine Using Adiabatic Model.

* Faculty of Education, Utsunomiya University

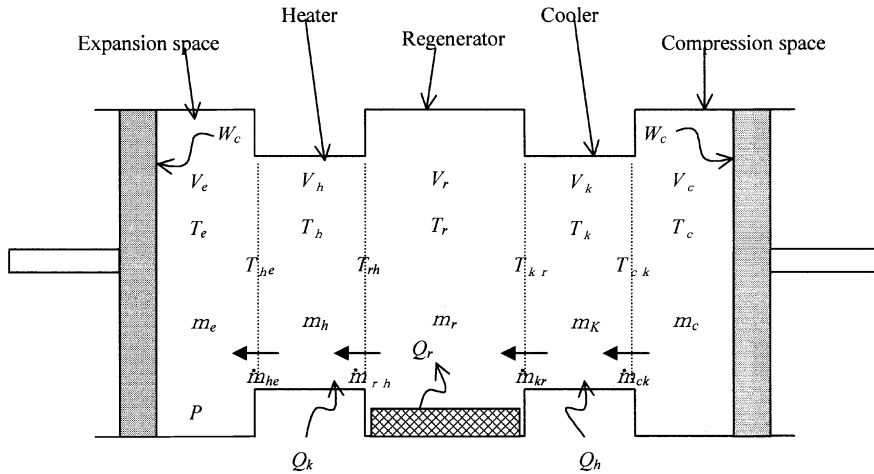


図1 理想断熱モデルのエンジン解析モデル

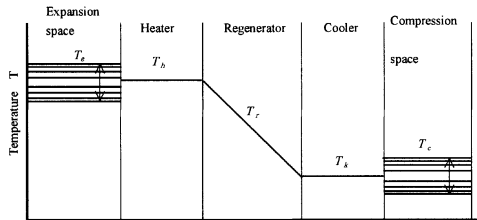


図2 断熱モデルの温度分布

図1から明らかなように、モデル内には4つの境界面が存在し、各境界面を出入りする流体の質量流量 \dot{m} やガス温度 T 等の各量に、圧縮空間/冷却器の境界面には ck 、冷却器/再生器では kr 、また再生器/加熱器では rh 、加熱器/膨張空間では he の添字を付して区別する。

ここで、5つの要素に分割された各空間に対するエネルギー式を導くため、任意の作動空間を考える。作動空間への熱伝達量 dQ と境界面を通して流入した正味エンタルピ ($C_p T_i \dot{m}_i - C_p T_o \dot{m}_o$) との和は、外部になした単位時間当たりの仕事 dW と作動空間の内部エネルギーの変化率 $C_v d(mT)$ との和に等しい。したがって式(1)のエネルギー式が成立する。なお、 $d = d/dt$ であり、例えば dQ は dQ/dt を意味する。

$$dQ + (C_p \cdot T_i \cdot \dot{m}_i - C_p \cdot T_o \cdot \dot{m}_o) = dW + C_v d(m \cdot T) \quad (1)$$

ここで、 C_p : 定圧比熱、 C_v : 定容比熱、 m : 質量、 \dot{m} : 質量流量。また、連続の式は次式で与えられる。

$$dm = \dot{m}_i - \dot{m}_o \quad (2)$$

ここで、添え字 i は系内への流入、 o は系外への流出を表す。流れの方向は任意に定めてよいが、本報においては、圧縮空間から膨張空間へ向かう流れを正方向 $\dot{m} > 0$ としている。境界面を横切る作動ガスは、流れの上流側の温度に保たれていると考える。その結果、圧縮空間/冷却器と加熱器/膨張空間の境界面 ck 、 he での作動ガス温度 T_{ck} 、 T_{he} は流れの方向によって次のように変化する。

(圧縮空間/冷却器境界面 ck)

$$\dot{m}_{ck} > 0 : T_{ck} \leftarrow T_c \quad \dot{m}_{ck} < 0 : T_{ck} \leftarrow T_k \quad (3)$$

(加熱器/膨張空間境界面 he)

$$\dot{m}_{he} > 0 : T_{he} \leftarrow T_h \quad \dot{m}_{he} < 0 : T_{he} \leftarrow T_e \quad (4)$$

理想気体の状態方程式を微分形で表すと以下のようになる。

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dm}{m} + \frac{dT}{T} \quad (5)$$

また、作動ガスの全質量 M は一定であるから以下のようなになる。

$$m_c + m_k + m_r + m_h + m_e = M \quad (6)$$

微分形で表すと次式となる

$$dm_c + dm_k + dm_r + dm_h + dm_e = 0 \quad (7)$$

各熱交換器の温度，容積は一定である。よって状態方程式は熱交換器に対して，

$$\frac{dp}{p} = \frac{dm}{m} \quad (8)$$

として与えられ，よって以下の式が導かれる。

$$dm_c + dm_e + \frac{dp}{p}(m_k + m_r + m_e) = dm_c + dm_e + \frac{dp}{R} \left(\frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) = 0 \quad (9)$$

ここで，圧縮空間に対してエネルギー式を適用する。この場合，境界面は ck のみであり，冷却器との境界面の温度は T_{ck} で与えられるので

$$dQ_c - C_p \cdot T_{ck} \cdot \dot{m}_{ck} = dW_c + C_v d(m_c \cdot T_c) \quad (10)$$

さらに圧縮空間は断熱されているので $dQ_c=0$ ，なされる仕事は $dW_c=p \cdot dv_c$ ，また連続の式より，圧縮空間質量の減少量 dm_c は，境界面から流失する作動ガスの質量流量 \dot{m}_{ck} に等しく， $dm_c + \dot{m}_{ck} = 0$ の関係が成立することから次式が得られる。

$$dm_c = \frac{p \cdot dv_c + \left(\frac{v_c}{\kappa} \right) \cdot dp}{R \cdot T_{ck}} \quad (11)$$

ここで， κ ：比熱比(= C_p/C_v)である。

膨張空間に対しても同様に，変形すれば次式が得られる。

$$dm_e = \frac{p \cdot dv_e + \left(\frac{v_e}{\kappa} \right) \cdot dp}{R \cdot T_{he}} \quad (12)$$

2.2 エンジン内瞬時圧力 dp の算出

ここで，式(10)及び(11)を式(9)に代入し，

$$A_{v/T} = \left(\frac{V_h}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right)$$

とすれば次式が得られる。

$$\frac{p dv_c + \left(\frac{v_c}{\kappa} \right) dp}{RT_{ck}} + \frac{p dv_e + \left(\frac{v_e}{\kappa} \right) dp}{RT_{he}} + \frac{dp}{R} A_{v/T} = 0 \quad (13)$$

式(13)を変形すると，圧力の微小変化量 dp が以下のように求められる。

$$dp = \frac{-\kappa \cdot p \left(\frac{dv_c}{T_{ck}} + \frac{dv_e}{T_{he}} \right)}{\left[\frac{v_c}{T_{ck}} + \kappa \left(\frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{v_e}{T_{he}} \right]} \quad (14)$$

ここで， κ ：比熱比である。

式(11)及び式(14)の連立微分方程式を解くと断熱モデルにおける瞬時圧力 p が求まる。また，圧縮空間並びに膨張空間でのガス温度の変化は式(14)で求まる圧力を用いて式(15)および式(16)で求まる。

$$T_c = \frac{pv_c}{Rm_c} \quad (15)$$

$$T_e = \frac{pv_e}{Rm_e} \quad (16)$$

ここで，連続の式を各境界面に適用すると，各質量流量は次式で与えられる。

$$\text{境界面 } ck : \dot{m}_{ck} = -dm_c \quad (17)$$

$$\text{境界面 } kr : \dot{m}_{kr} = \dot{m}_{ck} - dm_k \quad (18)$$

$$\text{境界面 } rh : \dot{m}_{rh} = \dot{m}_{kr} - dm_r \quad (19)$$

$$\text{境界面 } he : \dot{m}_{he} = \dot{m}_{rh} - dm_h \quad (20)$$

2.3 サイクル中での仕事の変化

エンジンによってなされる仕事 dW は

$$dW = p(dv_c + dv_e) \quad (21)$$

として与えられる。

各熱交換器での交換熱量 dQ は，以下のように計算される。

冷却器：

$$dQ_c = C_v \cdot V_k \cdot \frac{dp}{R} - C_p (T_{ck} \cdot \dot{m}_{ck} - T_{kr} \cdot \dot{m}_{kr}) \quad (22)$$

再生器：

$$dQ_r = C_v \cdot V_r \cdot \frac{dp}{R} - C_p (T_{kr} \cdot \dot{m}_{kr} - T_{rh} \cdot \dot{m}_{rh}) \quad (23)$$

加熱器：

$$dQ_h = C_v \cdot V_h \cdot \frac{dp}{R} - C_p (T_{rh} \cdot \dot{m}_{rh} - T_{he} \cdot \dot{m}_{he}) \quad (24)$$

ただし，熱交換器は等温であり，再生器の熱効率が100%であるという仮定から，冷却器/再生器と再生器/加熱器の境界面 kr, rh での温度 T_{kr}, T_{rh} は冷却器，

加熱器温度 T_k , T_h にそれぞれ等しく、この場合には次のような関係がある。

$$T_{kr} = T_k \quad (25)$$

$$T_{rh} = T_h \quad (26)$$

連立微分方程式を解くには、種々の計算手法があるが、本報ではシュミット解析による解析結果を初期値として与え、4次のルンゲクッタ法を用いる。なお、収束条件としては「再生器での交換熱量 Q_r は、再生器効率を 100% としているため、サイクルの終わりには $Q_r=0$ となること、または、前サイクルの最初の値は続くサイクルの最初の値に等しくなる等の条件を用いている。初期値の与え方にもよるが、たいていのエンジンでは 5~10 サイクルの繰り返し計算で収束する。

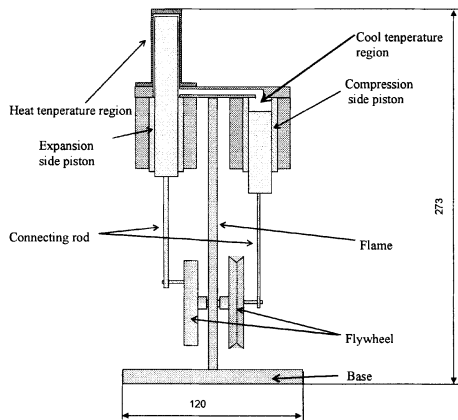


図3 供試エンジン

表1 供試エンジンの仕様

Engine type	α type
Expansion side piston volume	$3.92 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ ($\phi 18.9 \text{ mm} \times 14 \text{ mm}$)
Compression side piston volume	$3.92 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ ($\phi 18.9 \text{ mm} \times 14 \text{ mm}$)
Compression ratio	1.93
Heat method	Heating wire
Cool method	Electric cooling fan
Phase angle	90deg
Working gas	Air

3. 供試エンジン

本報で計算対象とするエンジンは教育用エンジンとする⁴⁾。教育用エンジンは、再生器を有しないタイプが多く簡易的なエンジンとして試作されている。しかし、再生器は物として存在はしていないが、その役目を果たしているのが膨張空間と圧縮空間とを連結しているガス通路もしくは加熱器周辺の通路である。このように熱交換器（加熱器、再生器、冷却器）での熱の授受をシミュレーションによって把握することは教育用エンジンとして重要である。供試エンジンの構造を図3に示す。また、その仕様を表1に示す。加熱器は熱伝導性の悪いステンレス製で製作され、冷却器への熱の移動を最小限に止めている。冷却器及びその通路と支柱等は放熱性を考慮してアルミニウム合金としている。膨張側及び圧縮側のシリンダ及びピストンにガラス製注射筒を用いている。機構部は、単クランク機構を採用しており、クランクピンの位置を変更することによって行程容積すなわち圧縮比を変化させることが可能である。加熱部にはステンレス製のキャップを用いているためガスバーナーによる加熱にも耐えられる。フライホイールは慣性モーメントを大きくするために黄銅製で製作され、バランス性を考慮して支柱の両側に取り付けられている。

4. 計算結果及び考察

計算条件は表1に示す主要諸元を用いるが、ガス温度及びエンジン回転数等は適宜与えている。

4.1 ガス温度

図4は加熱器内ガス温度 500°C 、冷却器内ガス温度 30°C と与えた場合の膨張側及び圧縮側ガス温度

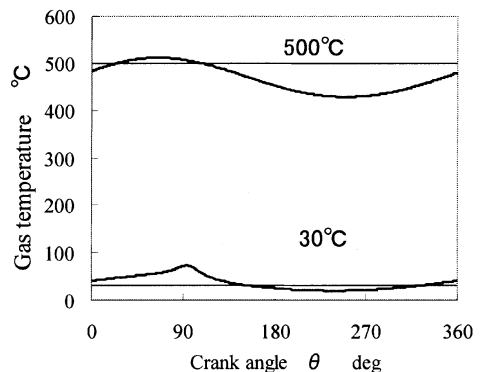


図4 圧縮・膨張シリンダ内ガス温度変化

の変化をクランク角に対して図示したものである。図4においては膨張側ピストンの上死点をクランク角“0deg”としている。すなわち概ね0—90deg間が加熱行程、90—180deg間が膨張行程、180—270deg間が冷却行程、270—360間が圧縮行程となる。加熱器内のガス温度は500℃一定として与えているが、膨張側ガス温度はサイクル中変化し、加熱行程ではガス温度が上昇し、膨張行程では低下している様子が見られる。冷却行程ではガス温度はさらに低下傾向を示し、圧縮行程では逆にガス温度上昇が見られる。圧縮側ガス温度も同様な傾向が見られる。膨張側平均ガス温度は約468.0℃となり、加熱器ガス温度から約32℃の低下となる。圧縮側平均ガス温度は約36.7℃であり、冷却器ガス温度から6.7℃の上昇となっている。これはシリンダ内への熱の供給が加熱器のみで、シリンダ内が断熱されているためである。

4.2 p-v線図

図5は式(13)を用いて算出された理想断熱モデルでのp-v線図を示す。この図は8サイクルで収束した。シリンダ内平均圧力は101.3kPaとしているので、ほぼ大気圧を中心に变化している。しかしこの図だけではその特徴が見えにくいため等温モデルとを比較したp-v線図を図6に示す。等温モデルでの膨張側ガス温度は500℃、圧縮側ガス温度は30℃と一定としている。この両者を比較すると傾きに大きな違いが見える。すなわち断熱モデルでは等温モデルに比べその傾きが急峻となっている。これは断熱モデルが膨張・圧縮シリンダ内において温度変化をしているため、シリンダ内圧力の変化幅が大きくなっていること及び行程容積が一定であるために傾きが大きくなると考えられる。ここで図示仕事を比較してみると、断熱モデルでは0.079J、等温モデルモデルでは0.059Jとなり、断熱モデルの方が若干大きくなっている。これは圧力変化幅が大きいことに起因するものと考えられる。

4.3 ガス圧トルクの変化

図7はピストンのガス圧トルクを示したものである。またこの図には膨張・圧縮両ピストンの合成トルクも示してある。正のトルクはエンジンから外部にするトルクを表し、負のトルクはフライホイールからピストンに与えられるトルクを示している。膨張側ピストンは加熱・膨張行程において正のトルクを示し、冷却・圧縮行程においては負のトルクを示している。圧縮側ピストンは、膨張側ピストンより

90deg遅れて変化しているが膨張・圧縮行程の一部が外部に仕事をしていることが確認できる。合成トルクにおいては、当然のことながら膨張行程において外部に仕事をしていることがわかる。すなわち合成トルクの平均が図示仕事を表していることになる。

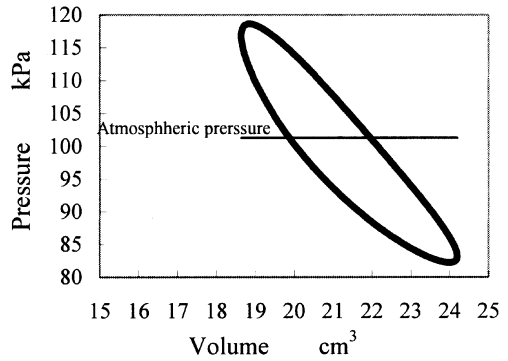


図5 断熱モデルによるp-v線図

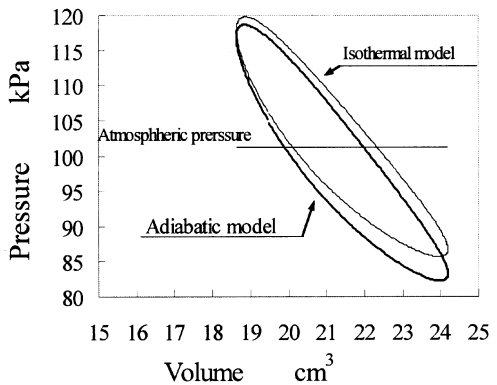


図6 理想等温モデルと理想断熱モデルとの比較

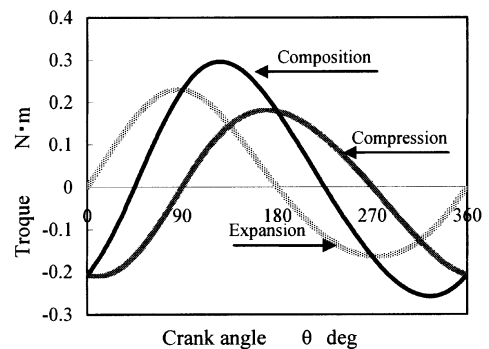


図7 ガス圧トルクの変化

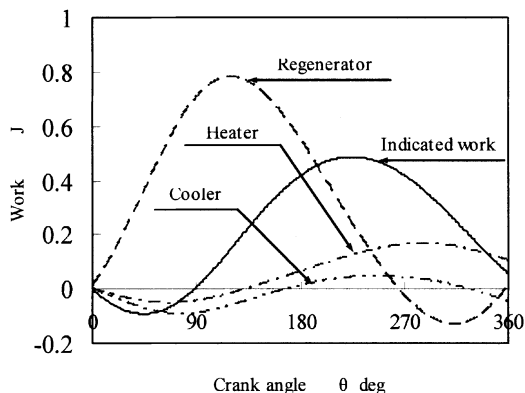


図8 図示仕事及び熱交換器内仕事の変化

4.4 図示仕事並びに熱交換器での仕事

断熱モデルでの最大の特徴は図示仕事並びに熱交換器でのサイクル中の仕事の変化を詳細に検討できることである。図8に図示仕事並びに熱交換器での仕事の変化を示す。まず実線で示した図示仕事のサイクル中の変化を見てみると、加熱行程では負の仕事を行っている。これはフライホイールから膨張・圧縮ピストンに仕事が与えられていることを示している。膨張行程から冷却行程にかけて正の仕事に変化し、最大図示仕事約0.5Jもの仕事を行うが圧縮行程においてほとんどの仕事が空気を圧縮するために使用されていることがわかる。

一方、熱交換器である再生器の仕事の変化を見てみると加熱膨張行程において急激な蓄熱作用を行うが、膨張・冷却行程においてそのほとんどの仕事が放出されることになる。圧縮行程において負の仕事となるが、一サイクルが完了すると再生器での仕事は“0”となる。これは再生器での熱交換が100%であると仮定して計算しているからである。この再生器での損失すなわち、再熱損失を考慮すれば“0”とはならない。すなわちスターリングエンジンの性能は再生器の大きな熱流に支配され、再生器の性能に依存していることがわかる。

次に加熱器の仕事の変化を見てみる。加熱器は外部に仕事をするわけではないので、加熱器内ガス温度を等温にするために必要な交換熱量の変化と見るべきである。加熱行程では作動ガスに熱を奪われるため負の仕事となる。しかし膨張行程においては作動ガスの移動が少なく、冷却行程において最大熱量が必要となる。この線図は加熱器を設計する際に必

要な基本的なデータとなる。

次に冷却器の仕事の変化を見てみる、冷却器も加熱器同様に外部に仕事をするわけではないので冷却器内ガス温度を等温にするために必要な交換熱量と考えることが妥当である。冷却器は加熱・膨張行程並びに圧縮行程の一部において負の仕事となる。これはサイクルを通して作動ガスを放熱し続けなければならないことを示している。この線図も冷却器の設計には重要な資料を与えることとなる。

5. まとめ

理想断熱モデルを用いて膨張・圧縮空間でのガス温度、熱交換器での仕事の変化及び $p-v$ 線図を計算することができ、次のことを明らかにした。

- (1) 連立微分方程式をExcelのマクロを用いて計算することができた。しかし、プログラム例は紙面の都合により割愛させて頂いた。
- (2) 膨張・圧縮空間でのガス温度変化を算出することができ、本計算条件では膨張空間は約32℃低下し、圧縮側ガス温度は約6.7℃の上昇となる。
- (3) 等温モデルと断熱モデルの $p-v$ 線図を比較した結果、断熱モデルの方が等温モデルより傾きが急峻である。
- (4) 図8において再生器での仕事はかなり大きいことからエンジンにおける再生器の重要性を見出すことができた。また本計算手法から加熱器及び冷却器を設計する際に必要な交換熱量を知ることができる。

参考文献

- 1) 増山豊：Excelで解く機械系の運動力学，共立出版，2003，pp. 37-52.
- 2) Theodor Finkelstein：Thermodynamic Analysis of Stirling Engines, J.SPACECRAFT, 4-9, (1967), p.1184.
- 3) Israel Urieli：David M Berchowitz, Stirling Cycle Engine Analysis, JW Arrowsmith LTD, (1984), p.86.
- 4) 内田剛司，戸田富士夫，中島克彰，他2名：教育用スターリングエンジンの開発，宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要，第29号，2006，pp.191 - 196.
- 5) 吉識晴夫・高間信行・上村光宏：スターリングエンジンの性能予測に関する研究（第1報），日本機械学会論文集，B(1990)，pp.50-455.