

数学的な見方・考え方を導く指導の在り方

－知識・技能を広く活用させる授業を通して－

長嶋裕子 酒井功夫 齊藤雄輔

1 研究テーマ設定の趣旨

最近の教育課程実施状況調査や国際的な学力調査（TIMSS2003,PISA2003）において、基礎的な計算技能の定着については低下傾向は見られなかったが、計算の意味を理解することなどに課題が見られたことや、身に付けた知識・技能を実生活や学習等で活用することが十分にできていない状況が見られたことが浮き彫りとなった。これらの事実を筆頭に、数学的に表現する力が不足していることや、数学を学ぶことの意義や有用性の認識が低いことなどが、数学教育を進めるにあたって大きな課題となっている。そして、それらをふまえての今後の数学教育における努力点が、現行学習指導要領改訂の議論において中心となっているのは周知の事実であろう。

また、昨年4月に行われた全国学力・学習状況調査の結果については、数学B（数量や図形などについての基礎的・基本的な知識・技能を活用することができるかどうかをみる問題）の17設問のうち、6問の正答率が5割を切ったという現状がある。さらにそのうちの数学的な説明を求められた4つの問題については、無回答率が約3割という結果が出た。今回の調査において正答率が低かったことについては、今後の調査における学力の推移も見守っていかなければならないが、無回答率が多いことについてはPISA2003調査でも問題となっており、授業における指導の改善が求められている。

次に、本校生徒の実態について述べたい。本校では昨年度まで、「考える力」を育てていくために、授業におけるコミュニケーション活動を手だての1つと考え、授業改善の研究に取り組んできた。その成果として、日々の授業において目的を持った話し合いを積極的に行い、共に学びあいながら楽しく授業に取り組む生徒が増えてきた。そして、PISA調査で問題となっている活用についても、生徒は身に付けた知識・技能を活用し、新しい問題を解決しようと日々前向きに取り組んでいる。しかし、いくつかの知識・技能を組み合わせ活用することや、より多くの見方・考え方を活用して問題を解決することについては苦手な生徒が多い（詳細は後述）ことや、単元終了ごとに実施している観点別テストの結果をみると、数学的な見方・考え方の観点において白紙で提出する生徒がいまだに見受けられるという課題も残されている。これは、日常場面に限らず、既習の知識・技能を新しい学習内容へ広く活用できていないことが大きな要因となっていると考えられる。

以上のことから、本校数学科では授業における指導改善の方針の一つとして、生徒に身

に付けた知識・技能を広く活用させるような題材や授業展開を工夫していくことにした。生徒に様々な知識・技能を活用しながら問題を考えさせる指導を繰り返すことで、多様な見方・考え方を導くことができる生徒を育てていきたい。そして、そうした指導の積み重ねが、数学科の目標の大きな柱である数学的思考力・判断力・表現力の育成につながっていくものと考えている。

2 研究計画

1 平成19年12月～平成20年6月（本年度）

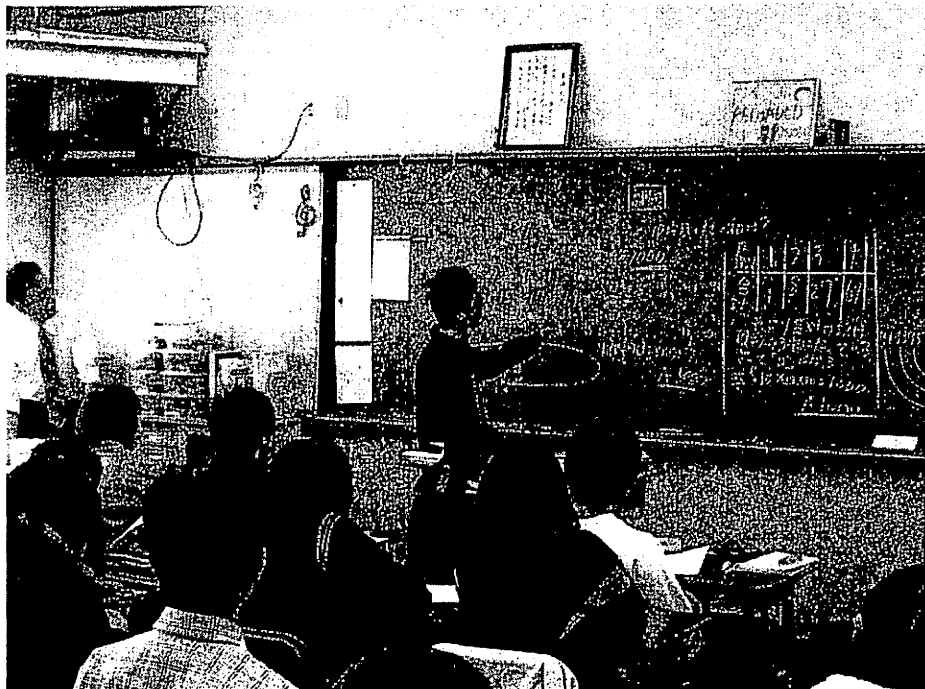
- ・数学を活用して新たな問題を解決しようとする意欲について、生徒の実態調査をする。
- ・本校数学科における「活用」についての考え方を整理し、「広く活用させる授業」の在り方を検討する。
- ・研究テーマを設定する。

2 平成20年7月～平成21年6月（平成21年度）

- ・広く活用させるための手だてについて考察をする。
- ・「広く活用させる授業」の事例を挙げ、実践する。
- ・「活用」についての考え方の修正を行う。

3 平成21年7月～平成22年6月（平成22年度）

- ・広く活用させるための手だてについて評価する。
- ・研究の成果と課題についてまとめる。
- ・新学習指導要領に即したカリキュラムを作成する。



広く活用させる授業にするための工夫

題材の工夫

- ◎既習の知識・技能を広く活用できるように意図した題材
- ◎いくつかの知識・技能を組み合わせ活用できるように意図した題材
- ◎より多くの見方・考え方をういながら問題解決できるように意図した題材

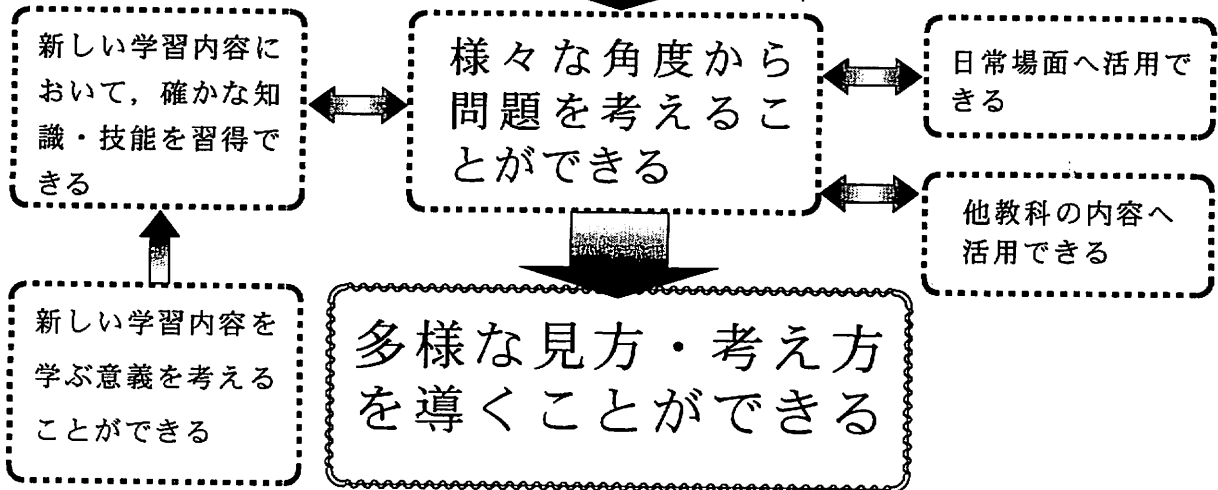
授業展開の工夫

- ◎教師がどのような見方・考え方を育てたいのかを明確にした授業展開
- ◎既習の知識・技能と新しい学習内容の関連を明確にし、新しい単元を学ぶ必要性を感じさせたり、その見通しを立てさせるような授業展開
- ◎新しい知識・技能を習得させるにあたって、既習の知識・技能を活用させ、生徒自らに学ばせるように仕向けた授業展開

身に付けた知識・技能を広く活用させる授業

習得

探究



意欲

数学的思考力・判断力・表現力の育成につながる

3 研究内容

1 数学を活用して新たな問題を解決しようとする意欲についての調査

本校数学科では、身に付けた知識や技能を活用して新たな問題を解決しようとする意欲について、生徒の様子を知るために、以下の調査を本校の第3学年の生徒160名(男子80名, 女子80名)を対象に、2008年2月に実施した。この調査結果を円グラフで示し、それぞれについて考察することにする。

数学の活用に関する調査

年 組 氏 名 _____

① これはテストではありません。学校の成績には、まったく関係ありませんので、あなたの思ったとおりに答えてください。
次の各項目について、自分に最もあてはまると思う記号を選んでください。また、文章で書くところは、できるだけ具体的にわかりやすく書いてください。

① 数学は好きですか。次のア～オの中から、最もあてはまるものを選んでください。

- ア 非常に好き
- イ まあまあ好き
- ウ 普通
- エ どちらかと言うと好きではない
- オ 好きではない

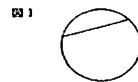
② 数学は、得意、日常生活に役立つと思いますか。次のア～エの中から、最もあてはまるものを選んでください。

- ア 非常に役立つと思う
- イ 時々役立つと思う
- ウ 役に立つことはあってもめったにないと思う
- エ 全く役に立たないと思う

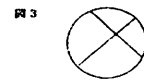
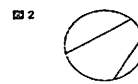
③ 数学は、どんなところで役に立っていると思いますが、役に立っていると思うところを具体的に書いて下さい。

④ 今、品物には5%の消費税がかかっています。ある文房具屋の店長は、今度、税金の制度が変わって、消費税が5%から8%に突増になるという話を聞きました。そこで、あらかじめ8%に値上げすることにしました。ところが、値上げしたために、さっぱり売れなくなってしまいました。そこで、3%値下げしてもとの値段にしようと思い、計算したところ、もとの値段より安くなくなってしまいました。なぜでしょうか。その理由を書いてください。

⑤ 円を線で分けて、いくつの部分に分けられるかを調べようと思います。たとえば、円を1本の線で分けると、下の図1のように2個の部分に分けられます。



また、2本の線で分けると、下の図2のように3個の部分に分かれる場合と、図3のように4個の部分に分かれる場合の2通りあります。



【問題】 円を7本の線で分けることにします。このとき、円を最大何個の部分に分けられますか。また、そう考えた理由も書いてください。

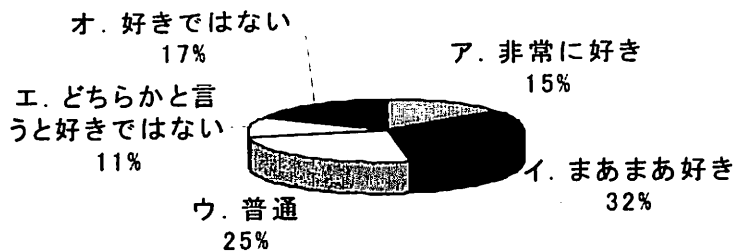
調べた結果 7本の線で分けるとき、円は最大 個の部分に分けられる。

途中の考えや調べた内容

設問①は、数学に対する「好き」、「好きではない」の調査と、数学の有用性についての意識調査である。また、日常のどのような場面に数学が役に立つと思っているかを調べるため、役に立っている場面を記述させた。

調査結果によると、①の設問では、数学が「非常に好き」「まあまあ好き」と答えた生徒を合わせると全体の47%の割合であることが分かった。

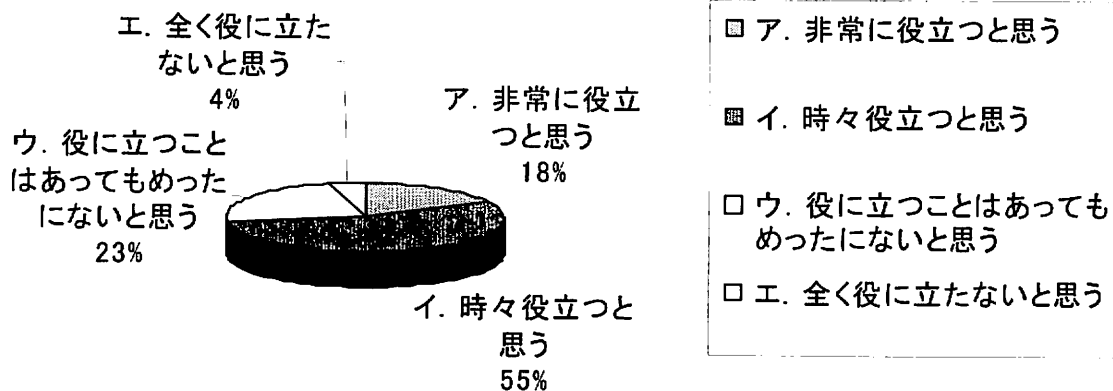
1 ① 数学は好きですか



- ア. 非常に好き
- イ. まあまあ好き
- ウ. 普通
- エ. どちらかと言うと好きではない
- オ. 好きではない

また、②の数学が役立っていると思うかどうかの設問では、「非常に役立つと思う」「時々役立つと思う」と答えた生徒を合わせると全体の73%に達し、全般的には数学の有用性を認めているように見える。

1 ② 数学は将来日常生活に役立つと思うか



活用場面を記述させた設問③の主な結果は、右の通りである。中には、「発明開発には大変役立っているのではないか。数式だけではなく、『数学的な考え方』が様々な職場で役立っていると思う」と答

1 ③ 数学はどんなところで役に立っていると思うか

- ・ 買い物, お金の計算, 家計簿
- ・ 料理
- ・ 経理, 金融関係
- ・ 機械などの物づくり
- ・ 建築, 設計, 測量 など

えた生徒もいた。しかし、多くの生徒が挙げた活用場面は「買い物」や「お金の計算」, 「料理」である。さらには、「算数ならたくさん使うが、数学は使わないと思う。」「日常生活に必要な。」と答えた生徒もいた。これらの結果から、小学校で学んだ算数は役に立つが、中学校で学んだ数学は、直接には日常生活には役立たないと考えている生徒が多いことが明らかとなった。

次の設問②は、日常の具体的な問題を解かせることによって、数学で学んだ知識・技能を活用しようとする態度を見ようとするものである。この問題では、消費税の問題を取り上げた。問題のねらいは、5%から8%に値上げした後、5%に値下げすると元に戻ると考えてしまうことがあるが、そうではないことを最初に言った上で、元の値段にならない理由を数式を活用することで説明できるかどうかを調べることにある。

まず、原価を仮に100円や1000円とおいて計算することで、正しく説明できた生徒は全体の22%であった。これらの生徒は、文字式を活用する前段階として捉えることができるであろう。そして、原価をx円等とおくことによって、文字式を活用して説明しようとした生徒は、全体の44%であった。この中で、正しく説明できた生徒は全体の34%であり、残りの10%の生徒は、文字式を活用しようとしたものの、正しく説明することができなかった。約半数もの生徒が文字式を活用して説明することを試みたということは、それだけ文字式のよさを理解していると言える。しかし、その一方で、10%もの

生徒が正しく説明できなかつたということは、我々の指導面における今後の課題と捉えることができるであろう。これらの点において指導を工夫することで、今まで以上に積極的に文字式を活用しようとする態度を育てることができるのではないだろうか。

次の設問③は、円を弦で最大何個に分割できるかという問題を解かせることによって、帰納的に考察を進め、成り立つ規則や性質を見い出させようとするものである。すなわち、数学的見方・考え方を活用しようとする態度を見ようとするものである。

円を7本の弦で分割した場合、最大29個の部分に分割できる。この問題の正答率は全体の42%であり、半数にも満たないという結果であった。この中の39%の生徒は帰納的に考え、図をもとに次のような表を作成し、そこから規則性を見い出すことで解決していた。また、表から

見出した規則性から、弦の本数を n として、分割できる最大個数を n を用いた式で一般化することができた生徒もいたが、全体のわずか3%であった。

【弦の本数と分割できる最大の個数】

弦の本数	1	2	3	4	5	6	7	...
最大の個数	2	4	7	11	16	22	29	...

$+2$ $+3$ $+4$ $+5$ $+6$ $+7$

その一方で、誤答であった54%の生徒の多くは、図をかくことで解決しようとしていた。しかし、「分割される部分の数をできるだけ多くするように弦をひく」すなわち「既にひかれている弦とできるだけ多く交わるように、新たな弦をひく」ことに気がつかない生徒が多く見られた。また、図をかくことで解決しようとした生徒の中には、これらの性質に気づいていながら、正確に図にかき表すことができないうために、誤答となってしまった生徒も見られた。

これらのことから、事象を考察する際に、ともなって変わる2つの数量を見い出して、表などを用いて数学的に表現し、整理することで、帰納的に考察するよさが十分に理解されていないことが明らかとなった。今後は、関数的な見方・考え方を育てる手立てを講じていくことで、図をかくことだけで解決しようとするせずに、表などを積極的に活用しようとする態度を育てることができるのではないだろうか。

この調査結果全体から言えることは、次の2つである。1つ目としては、算数ならまだしも数学が日常生活や将来役に立つとは考えていない生徒が多いということである。

そして、2つ目としては、日常場面の具体的な問題を解決する際に数学で学んだ知識・技能を活用しようとしたり、ある領域の数学の問題を解決する際に、他の領域で学んだ数学的見方・考え方を活用しようとする姿勢はまだまだ消極的であり、手立てを講じていくべき今後の課題と考えられるということである。

2 なぜ「広く活用させる」ことが大切なのか

(1) 「活用」についての考え方

まず、本校数学科における「活用」についての考え方を述べたい。生徒は身に付けた知識・技能をどの方向へ活用していくのか、という視点で考えると、①数学の内容への活用、

②日常場面への活用、③他教科の内容への活用の大きく三つに分類できる。①については、主に身に付けた知識・技能を新たな数学の問題場面に活用し、解決していくことである。②については、主に数学的見方・考え方の活用で、数学という教科の柱となる大きな目標であり、数学的リテラシーにもつながっていくものである。③については、他教科の学習内容において、数学の知識・技能を活用することである。例えば、理科の「力のつりあい」の学習内容において三平方の定理の技能を活用したり、体育の保健分野において関数のグラフを読み取ったり、データをグラフに表したりする。また、音楽のリズム感の学習において、速度記号と拍子から曲の速度を計算するのに、数量関係を捉える考え方を活用したりするようなことである。

①と②・③はそれぞれ独立させて考えるべきものではなく、常にこの両方を総合的に学習させていかなければならない。例えば、①の学習活動で学んだことを②・③の学習活動へつなげていったり、②・③の学習活動において①の学習活動の必要性を感じさせるような学び方をさせたりといった感じにである。今後においては、①の学習活動を中心に据え、多様な見方・考え方を導きながら新たな数学の問題場面を解決していけるような授業展開について考えていきたい。

(2)「広く活用させる」とは

数学的見方・考え方は、演繹的な考え方や、帰納的な考え方や、発展的な考え方など数学の方法に関係するものと、関数的な考え方や、集合的な考え方など数学の内容に関係するものなど、いくつかの具体的項目に分類できる。これらは、教師側が授業の中でどのような見方・考え方を育てていくのかを整理するためのものであり、生徒側が意識して考えていくものではない。つまり、これらを育てていくには、授業において教師側の意図された手だてが必要である。

「活用させる」とは、教師が授業の中で、どの見方・考え方を育てたいのかを明確にし、生徒がその見方・考え方をいながら問題解決できるように意図した題材を用いて授業展開をすることである。そして「広く」とはより多くの見方・考え方をい、様々な角度から問題解決できるように題材、発問、授業展開を工夫していくことである。授業の中で、生徒が多様な見方・考え方を導けるような手だてを講じていくことが大切である。

(3)「広く活用させる授業」を通して

広く活用させる授業を展開することについては他にも重要な意義がある。例えば、単元の導入の授業などで、身に付けた知識・技能を広く活用させることにより、既習の知識・技能と新しい学習内容の関連を明確にし、新しい単元を学ぶ必要性を感じさせたり、その見通しを立てさせるような指導につなげることができる。また、新しい知識・技能を教師が教え込むのではなく、既習の知識・技能を活用させ、生徒自らに導かせることができるようにし向けることで、それらを確かな知識・技能として習得させることもできる。

確かな知識・技能を習得できるということは、その後の広く活用させる授業の基盤となり、また、新たな知識・技能の習得につながっていく。つまり、確かな知識・技能の習得と、広く活用することは相互に育てられるものである。そして、こうした指導の繰り返しによって、やがては多様な見方・考え方を活用できる生徒の育成につながっていくものと考えている。

3 数学科における「活用させる授業」の実践事例

前述の通り、本校数学科では今後「広く活用させる授業」を通して、多様な見方・考え方を導く指導をしていきたいと考えている。しかし、旧指導要領（平成14年度より施行されたもの）にも「活用する態度」の育成には重点が置かれており、本校においてもこれまでの授業において指導を工夫してきた。

ここでは、本校数学科がこれまでに指導を工夫してきた「活用させる授業」の実践事例（数学的な見方・考え方の活用の事例）を示したい。

実践例 三平方の定理

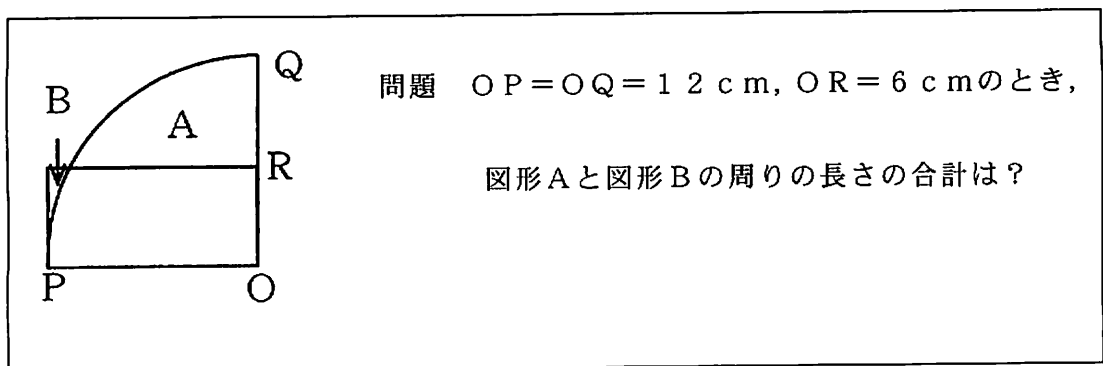
(1) 題材観

数学はもともと、建築・測量・金銭の計算など、日常生活に生起する問題を解決する中で発展してきた。ところが、中学校以降で学習する数学は、ややもすると日常生活から遊離してしまい、数学を学ぶ生徒の学習意欲を奪い、学ぶ目的を失わせる要因の一つになっている。つまり、日常生活に数学を活用しようと考えたとき、将来的に建築や商業の職業に従事しようと考えている生徒以外は、数学の有用性を感じとってはいなかったところがある。そこで、ここでは、数学の内容そのものを、日常生活に活用したり、違った場面に活用したりするのではなく、数学的な見方、考え方を活用する場面を通して、論理的な思考力、想像力、直観力など新たな発想を生み出すもとになる基盤にしたいと考え、授業を設定した。

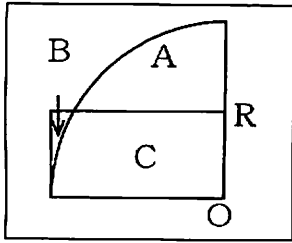
具体的には、次のような場面を考え、実践した。数学の問題を解くのに、いろいろな工夫がなされる。そんな工夫の中で、同じものを引いてから加える、また加えてから引いても変わらない場合がある。その考え方を活用して、三平方の定理の利用問題を解決していく授業である。

(2) 指導の実際

授業の導入としては、次のような問題を提示した。

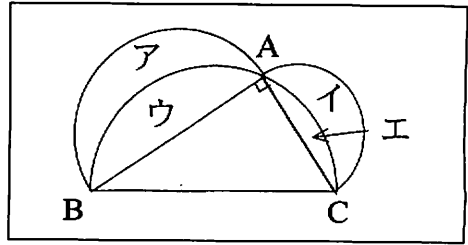


これは、小学校の知識だけでも解決することが問題であり、ほとんどの生徒は容易に解決することができた。次に、活用といった観点とは直接的に関係はないが、数学科としては、「発展的に考える力」を育てていくことも大切であるため、この問題を原題として発展問題を考えさせた。生徒に発展的に考えさせていく上で、一番簡単な方法としては、原題の条件をかえていくことである。生徒とのやりとりによって、「A - B の面積は？」という課題を設定した。



原題に比べるとちょっと難しく感じたようである。そこで、任意小集団による話し合い活動をれたところ、Cという図形の面積に着目し、多くの生徒が、 $(A + C) - (B + C) = A - B$ ということに気が付き、難なく $36\pi - 72$ という答えを導き出すことができた。

次に類似問題として、右図における「ア+イ=△ABCを証明しよう」を扱った。生徒の反応としては、三平方の定理を学習した直後であるため、その定理を利用して解決しようと試みていた。



10分程度の解決時間を与えたが、一応の解決が図れた生徒は、数名であった。そこで前ほどの問題で学習した数学的な工夫を図ることを指示した上で、任意小集団による話し合いをさせた。そうしたところ、今回の問題とはなっていない、ウやエの部分を見ることで、次のように容易に解決が図れることに気づくことができたようである。

$$\begin{aligned}
 (\text{ア} + \text{イ}) + \text{ウ} + \text{エ} &= (\text{ア} + \text{ウ}) + (\text{イ} + \text{エ}) \\
 &= \text{半円 AB} + \text{半円 AC} \\
 &= \pi/2 (AB/2)^2 + \pi/2 (AC/2)^2 \\
 &= \pi/8 (AB^2 + AC^2) \\
 &= \pi/8 BC^2 = \pi/2 (BC/2)^2 \\
 &= \triangle ABC + \text{ウ} + \text{エ}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ア} + \text{イ} = \triangle ABC$$

生徒のワークシートより

$$A+C = 12 \times 12 \times \pi \cdot \frac{1}{4} + 144\pi \times \frac{1}{4} = 36\pi$$

$$B+C = 6 \times 12 = 72$$

$$(A+C) - (B+C) = A-B$$

$$A = 36\pi - 72$$

$$\text{ア} + \text{イ} = \text{ウの部分} + \text{エの部分} + \text{△ABC}$$

$$\text{予想 } \text{ア} + \text{イ} = \triangle ABC$$

$$\text{ア} + \text{イ} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ab$$

$$-\left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \pi + \frac{1}{2} ab$$

$$ABC \text{ は 直角三角形}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \frac{1}{2} ab = \triangle ABC$$

$$\text{代入し } \therefore \frac{1}{2} ab = \triangle ABC \quad \text{ア} + \text{イ} = (\text{ア} + \text{イ}) - (\text{イ} + \text{エ} + \text{ウ}) + \text{ウ}$$

最後に、本時に学習したことを書かせたところ、次のような感想が数多くあり、こちらがねらいとした、数学的な見方・考え方の活用を図ることができたものとする。

- ・このような図形の問題を解決したことで、一つの図形を見るのではなく、求める部分でないところも見たりして図形を求める方法があることがわかった。
- ・文字で置いたり、図形の見方を変えることにより、複雑な図形の問題も簡単に解決することができることがわかった。
- ・一見難しそうに見える問題でも違った見方でみると、案外簡単に解決できることがわかった。
- ・様々な方向から図形を見て、必要でない部分にも目を向けることで、簡単に問題が解決することができるということがわかった。
- ・いらなところを見ること（見方を変える）によって、解決できることがわかった。
- ・一般的に方程式では、求めるものを文字で置くことが多いが、図形では一見関係なさそうなどところをみて、文字などで置くことによって解決できるのはすごいと思った。
- ・知識だけでなく、以前に学習した見方を利用することで、問題が容易に解決できることがわかった。

このように、授業展開の工夫によって、多様な見方・考え方を導く指導に近づけることができる。今後は、これまでの「活用させる授業」を新指導要領の内容に照らし合わせ、修正・改善を加えるとともに、それぞれの単元や課題学習において我々の意図している授業を開発していかなければならないと考えている。

4 今後の課題

これからの社会においては、自ら考え自ら判断し、表現し、行動できる力を備えた自立した人間を育成することがますます重要になってくる。そのためには、基礎的な知識・技能を徹底して身に付けさせ、それを活用しながら「確かな学力」を育成し「生きる力」を育むという基本的な考え方が今まで以上に重要である。そこで、我々は、「習得→活用→探究」という学習プロセスの「活用」に焦点をあて、研究し始めたところである。しかし、ここで大切なことは、「習得」というのは、「習得→活用→探究」のプロセスの出発点ではなく、「活用」と「探究」とを通して、「習得」した学習内容の形成過程を確認することもその中に含まれるということである。

具体的に本校数学科では、活用することによって得られた知識・技能は、単なる詰め込みによって得られたものよりも確固たるものになると考え、今までの研究を振り返り、その成果が期待できるところは生かしつつ、どのような場面でどの様に活用させることが有効であるかを考えていこうと思っている。今のところは、まだまだ研究が始まったばかりであり、生徒の実態がやっと把握できたところである。今後は、さらに、生きた知識・技能となるために、活用をさせる上での有効な手だてを考えていかなければならない。また、活用させることが、単に知識・技能を習得させるにとどまらず、広くは数学的な見方・考え方を高めることにつながっていくことになるのかどうかを探っていくことが重要である。

と考えている。

【主な参考文献】

- ・文部科学省 『中学校学習指導要領（平成10年12月）－解説－数学編』 大阪書籍
- ・文部科学省 教育課程部会2006年2月13日資料 『「活用」についての整理の例』
- ・文部科学省 国立教育政策研究所
『平成19年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』
- ・片桐重男著 『数学的な考え方の具体化と指導』 明治図書 2004年
- ・正田 實編 『数学の活用能力を伸ばす指導』 明治図書 1989年

