

「自ら学び自ら考える力」を育てる数学科の指導の在り方

—学ぶ楽しさの追究—

数学科 湯澤 正弘 酒井 功夫 齊藤 和久

1 研究テーマ設定の趣旨

本校数学科では、昨年より3年間にわたって「自ら学び自ら考える力」を育てる指導をテーマに研究を進めている。

我々は、以前平成8年度にも「関心・意欲・態度を育てる指導と評価」をテーマとした情意面に関する研究を行った。その時は、それまでの知識・技能に偏っていた我々教師側の意識を変えることができたことや生徒に数学のよさ、有用性、美しさ等を感じさせることができるようになったことなど一応の成果を得ることができた。しかし、数学の学習に自ら取り組むといった能動的な態度まで培えたかという点が課題として残されるものであった。

また、昨年12月に文部科学省から全国の小中学生45万人に昨春行った学力調査の結果が公表された。算数・数学においては1994年から96年にかけての前回調査より正答率が落ち、学力低下を浮き彫りにしたものであった。もちろんこの調査は、新学習指導要領前に行われたものであり、授業内容、時数の削減とは直接結びつくものでないことは明確である。しかし、テストとともに実施されたアンケート結果から点検してみると、小中学生ともに8割以上が「勉強は大切だ」と思っているのに、「勉強が好き」と答えたのは小学生が約4割、中学生に至っては2割にとどまっている実態である。また、小中学生の1割近くが学校の授業以外にまったく勉強しないなど、子どもたちの学習意欲の低さも看過できないものである。

以上のようなことなどから、数学の学力を高めるためには、まず情意面の高揚を図る必要があるように思われる。そこで、我々は、学ぶ楽しさを実感させることで、自ら学習しようとする態度を育て、それが数学教育のねらいとする考える力を育成していくことにつながるかと考え、本テーマを設定した。今回は、本校生徒の数学に関する意識を把握するための実態調査とその調査から具体的な問題点を見出し、授業の中で関心・意欲・態度が高まるような手だてを講じた授業実践の事例を紹介する。

2 研究計画

1 平成14年4月～平成15年6月

- ・「自ら学び自ら考える力」について生徒の実態調査をする。
- ・数学科における「学ぶ楽しさ」について分析する。
- ・授業改善の手だてを考察する。

・「学ぶ楽しさ」に視点を当てた授業を実践する。

2 平成15年7月～平成16年6月

- ・授業改善の手だての評価を行う。
- ・授業改善の手だてについて、修正・改善する。
- ・数学科における「学ぶ楽しさ」について、修正・改善する。
- ・「自ら学び自ら考える力」が高まったかどうか検証し、研究の評価を行う。

3 研究内容

1 我々が目指すもの

我々は、数学についての学習意欲を高めるためには、数学の中で「楽しい」と思える場面を生徒に実感させてあげることであると考えている。もちろん楽しいと感じるためには、数学に限らずどんな教科であっても「わかる、できる」ということが重要であろう。つまり、このことは本校でとらえている「学んだ力」「学ぶ力」と大いに関係するところである。しかし、ここでは、これら2つの力とは別な「学ぼうとする力」における「楽しさ」を追究していくことから、関心・意欲・態度を高めていこうと考えた。

そこで、我々は研究初年度に次のような楽しさを実感させたいと考えた。

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">・考える楽しさ・感じる楽しさ・友達と関わる楽しさ |
|--|

それぞれの意味としては、「考える楽しさ」とは、習ったことが使えないかなとか、いつでもできるのかなといった「問い」を解決していく楽しさである。「感じる楽しさ」とは、面白いとか不思議だなといった「問い」をもつことから感じられる楽しさである。「友達と関わる楽しさ」とは友達の思考過程に寄り添う楽しさである。

ここでは、以上の楽しさを考えたわけであるが、これらの楽しさを実感させていくことは、そう簡単なことではない。多大なエネルギーを使って、迷い、悩み、苦しんだ上で、解決できたとき、本当の意味の「楽しさ」を感じるであろう。そう考えると数学教育の最終的な目標とするところの「考える力」の育成がやはり重要であるということになる。ところで、「考える力」を深く探ってみると課題設定力、課題解決力、課題追究力の3つの力を育成していくことであると考え。つまり、「感じる楽しさ」と「友達と関わる楽しさ」は「考える楽しさ」を中心に据えた車の両輪と考えられる。

2 学習意欲調査

我々は、昨年10月に、青山庸氏が作成した数学の学習意欲の観点を参考にして、全生徒を対象に調査を行った。そして、研究最終年度に同じ調査を行い3力年の研究を通して、生徒の意欲・態度がどのように変容したかを調べようと考えた。

この調査は設問ごとに、三つの選択肢（ア．いつもそうしている イ．時々している

ウ. していない) を設けている。調査項目は次の通りである。

[考える楽しさ]

1. 自分の考えと比較しながら先生や他の人の考えをよく聞き、計算や証明の解決の仕方をいくつも工夫しようとしていますか。
2. 数学の問題を解くとき、解決の仕方を一通りではなく、いろいろな考え方をして解決の仕方をいくつも工夫しようとしていますか。
3. 学んだ数学をもとに、自分の数学の問題をつくったり「数学のあそび」「パズル」などを考えることがありますか。
4. 数学の授業で、よいアイデアやユニークな考えを出す方ですか。
5. 数学で学んだことを身近なものからさがしたり、日常生活に生かそうとしていますか。
6. いつも筋道を立てて考えようとしていますか。

[感じる楽しさ]

7. 「おや変だ」「なぜだろう」といった問題意識を持ちながら授業を聞いていますか。

[友達と関わる楽しさ]

8. 数学の授業で日頃自分の考えをよく発表していますか。
9. 数学の学習でわからないところは、友だちによく質問しますか。
10. 数学の授業で、友だちと励まし合ったり、協力したりよい意見には賛同したりしていますか。

3 学習意欲調査の結果と考察

前述した調査項目の調査結果を表で示し、それぞれについて考察することにする。

(1) 考える楽しさ

設問1についてみると、自分の考えと比較しながら先生や他の人の考えをよく聞き、計算や証明の仕方をいつも工夫している生徒が学年が上がるにつれて増加しておりよい傾向である。

設問2については、数学の問題を解くとき、解決の仕方を一通りではなく、いろいろな考え方をして解決の仕方をいくつも工夫しようとしている生徒が全体で88人(19%)であり、多様な考えをしようとしている生徒が少ないことが分かった。このことから、多様な考えができるような課題を開発したり、多様に考えることのよさを味わわせたりすることで、常に多様に考えようとする意欲を育てなければならないと考えている。

設問3については、学んだ数学をもとに、自分の数学の問題をつくったり「数学のあそ

表1 考える楽しさの調査結果

	1年	2年	3年	全体
1-ア	52	77	83	212
イ	90	63	58	211
ウ	14	13	12	39
2-ア	31	25	32	88
イ	84	94	79	257
ウ	41	34	41	116
3-ア	8	4	10	22
イ	46	33	27	106
ウ	101	117	115	333
4-ア	9	10	11	30
イ	89	65	56	210
ウ	58	79	85	222
5-ア	12	10	14	36
イ	65	67	58	190
ウ	79	75	80	234
6-ア	34	39	48	121
イ	93	90	73	256
ウ	29	24	33	86

び」「パズル」などを考えることをほとんどしていない生徒が全体で333人(72%)おり、授業後の学びにつながるように、授業の終末段階で、学んだことの生かし方を知らせたり考えさせたりすることが研究の課題になってくるのではないだろうか。

設問4について、学年が上がるにつれて数学の授業で、よいアイデアやユニークな考えを出さない生徒が増えている。中学生の発達段階を考えると仕方がない面もあるが、数学の授業でよいアイデアやユニークな考えを意欲的に出す生徒が増えるように授業の改善をしていかなければならない。

設問5については、数学で学んだことを身近なものからさがしたり、日常生活に生かそうとしたりしている生徒が、時々しているも含めて226人(49%)もあり、前回の研究「数学科における学び方の基礎基本」で「活用する力」を高めた成果が表れているのではないかと推測している。

設問6について、学年が上がるにつれていつも筋道を立てて考えようとしている生徒が増えておりよい傾向である。

(2) 感じる楽しさ

表2 感じる楽しさの調査結果

「おや変だ」「なぜだろう」といった問題意識を持ちながら授業を聞いている生徒が時々しているも含めて全体で409人(89%)もいる。しかし、いつもそうしている生徒は153人(33%)しかおらず、教師側の課題の提示の工夫にかかっているとんでも過言ではないだろう。

	1年	2年	3年	全体
7-ア	52	39	62	153
イ	88	100	68	256
ウ	16	14	22	52

(3) 友達と関わる楽しさ

表3 友達と関わる楽しさの調査結果

設問8について、数学の授業で日頃自分の考えをよく発表していない生徒が、学年が上がるにつれて増えており、これは中学生の発達段階を考えると仕方がない面もあろう。しかし、多様に考える中で解決した喜びや達成感を味わった生徒は、自ら進んで発表するようになるのではないだろうか。

	1年	2年	3年	全体
8-ア	19	2	5	26
イ	78	57	46	181
ウ	59	94	100	253
9-ア	51	40	54	145
イ	71	83	67	221
ウ	34	34	31	99
10-ア	63	57	52	172
イ	71	74	69	214
ウ	22	22	31	75

設問9について、数学の授業でよく分からないことを友達に質問する生徒は時々するも含めて366人(79%)いる。また、他の調査でわからないところを先生によく質問しますかとたずねた結果、時々するも含めて、先生に質問している生徒は236人(51%)しかいなかった。この結果、生徒は友達と関わりながら学ぶ楽しさを実感していることが分かり、ふだんの授業の中でも友達と関わりながら解決する場面を組み入れることが重要と考えている。

設問10について、数学の授業で、友だちと励まし合ったり、協力したり、よい意見には賛同したりしている生徒は、時々しているも含めて386人(84%)おり、「友達と関わる楽しさ」を実感できるように展開している研究の成果が表れてきているのではないだろうか。今後は、ウのしていない生徒を少しでも減らすように研究を進めていかなければならない。

4 「楽しさ」を実感させる指導

研究当初において、我々は「楽しさ」を実感させるための方策として、問題解決過程における問題場面を提示する場面と追究の場面において手だてをうつべきこと、そして教材そのもの楽しさが感じられるように教材を開発していくことが必要であると提案した。特に問題解決過程においては、次に示すような段階別に改善の視点を捉え、その手だてを考えた。

問題解決過程	改善の手だて
問題把握	問題場面提示の工夫
課題設定	効果的な発問
課題解決	多様な解決法、よさ
解決の検討	議論する場の形態、効果的な発問
まとめ(振り返り)	評価の工夫(教師から、他者から、自己)
発展、補充	効果的な発問

しかし、これら二つのことは、それぞれ独立して考えるものではない。例えば、問題場面を提示する際に、シミュレーションを利用したり等いろいろ工夫しても、問題を解いてしまえば終わりというのでは、生徒に「あれっ、おかしいぞ!」「なぜだろう?」「おもしろそう」といった問題意識など生まれるはずはない。つまり、生徒が「あっ!」「えっ!」と思わず驚きを感じ「面白そう」「なぜかな?」といった問題意識を持ち、「あっ、そうか!」「なるほど!」といった納得が得られるような「心動かされる場面」は、教材そのものに大いに関わりがあることは明白である。

そこで我々は、問題解決過程での場面を細分化し、それぞれの場面に有効な教材を開発していくことに重点を置いた。毎授業、問題解決型の授業をすることは難しいし、より新鮮な教材を作り出すことも容易ではないが、できるだけ我々教師の意識を変えることを目標に少しずつ取り組んでいこうと思う。ところで、ここで細分化した「心動かされる場面」とは、細水保宏氏の考え方を参考にさせてもらい次のようにまとめてみた。

- ① 矛盾のある場面「あれっ、変だぞ!」⇒「はっきりさせよう」
- ② 煩雑で手間がかかる場面「ごちゃごちゃしているな」
「めんどくさいな」⇒「すっきりさせ、簡単にしよう」
- ③ 曖昧でわかりにくい場面「はっきりしないな」⇒「はっきりさせよう」
- ④ 数理的に処理されている、美しさが表れている場面
「なるほど」「きれい」⇒「なぜだろう」「いつでもいえるのかな」
- ⑤ 不完全、不可能な場面「きれいでない」「できない」⇒「なぜだろう」
- ⑥ 一応の解決が図られた場面
「もっとよくしたい」⇒「もっと簡潔、明瞭、的確にできないかな?」
「いつでも使えるようにしたいな」
「別な解決方法はないかな」
- ⑦ 多様に課題がある場面「課題がたくさんあるな」⇒「どれからやってみようかな」

以上までのことをまとめると楽しさを実感させるための手だてとしては、次の三点になる。

- ①細分化した問題解決過程の場面での有効な教材の開発と問題提示の工夫
- ②発問分析と工夫（心を揺さぶる発問，考えを深める発問）
- ③学習形態の工夫（考え方を議論したり，深めたりする場の設定）

5 指導の実際

(1) 3年 式の計算の利用 「連続する2つの整数の2乗の差は？」

ア 楽しさを実感させる授業の構想

この授業における楽しさ

展開，因数分解の利用では，いくつかのパターンの証明問題を与えて，それを順に証明していくというのが一般的である。しかし，それらは証明すべき結論が最初から提示されており，生徒にとってはなぜ証明をしなければならないのかといった必要感のないものになってしまう。そこで，本時では，「本当だろうか」「証明してみよう」といった，証明の必要性を自ら感じ取れるような授業展開をしたいと考える。そのために，心動かされる場面④にあるような数理化されて美しく計算された式を提示し，そこから結論そのものを生徒が帰納的に発見し，自分達が予想した事柄を何とか解決してみようとなるような展開とする。

イ 授業展開

右のように，連続する2つの
整数の2乗の差を計算した。

$$5^2 - 4^2 = 9$$

$$8^2 - 7^2 = 15$$

$$24^2 - 23^2 = 47$$

$$(-9)^2 - (-10)^2 = -19$$

授業の導入では，連続する2つの整数の2乗の差を計算した上記のものを提示し，そこからどのようなことがいえるかを考えさせた。ここではあくまでも予想でかまわないので，自由な発想のもと些細な発見をも大切にするようにした。生徒からは，差は，ア 2数の和に等しい。イ はじめの整数の2倍から1ひく。ウ あとの整数の2倍に1をたす。エ すべて奇数になる。が発表された。すると，何人かの生徒が，自ら別な具体的な数で，ア～エが成り立つことを証明し，おそらくすべての数で成り立つであろうことを予想していた。

自ら予想したことには，「いつでも言えるのかな？」といった一般化しようとする活動を楽しむ姿が見とめられる。そして，予想したことやそれを簡単な数で確かめたことで得られた問いは，これから追究していこうといった強いエネルギーを含んでおり，意欲の向上へとつながる。このような経験を繰り返していくことは，問題を発見し，解決・追究し

ていくといった数学的活動の楽しさを味わわせていくことになると考えられる。
この授業では、この後文字式を利用して次のように一応の解決を図った。

アについて

(その1) はじめの整数を x とすると、

$$\begin{aligned}x^2 - (x-1)^2 &= 2x - 1 \\ &= x + (x-1)\end{aligned}$$

(その2) はじめの整数を x 、あとの整数を y とすると、

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y) \\ x-y &= 1 \text{ より} \\ &= x+y\end{aligned}$$

イについて

アの(その1)の証明と同じ

ウについて

あとの整数を x とすると

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - x^2 &= x^2 + 2x + 1 - x^2 \\ &= 2x + 1\end{aligned}$$

エについて

ウの証明

実際に取り組みはしなかったが、この後どんなことを考えてみたいかといった質問をしたところ、生徒からは、足し算では、どうなるのだろうか?とか、3乗ではどうなるのだろうか?といった発展的な考えにつながる事柄が発表された。

(2) 2年 平行と合同「角の二等分線の作図は正しいの?」

ア 楽しさを実感させる授業の構想

この授業における楽しさ

数学の研究においては、新しい概念やアイデアを導入し、それに関連する理論を体系化し構築していくことが大切にされている。しかし、一つの法則の正しいことを別の角度から見直す、いわゆる別証明の考えも尊重されている。つまり、結果と共に、それに至る過程も重要視されることが多い。三平方の定理の証明方法が数百種もあるように、数学の基本的な定理については、それを多様な見方・考え方を通して考察することが価値のあることとされている。

数学の学習においても、基礎・基本的な概念や法則、問題を解決する際の見方・考え方などは、ただ一通りの見方・考え方だけでなく、多様な観点から考察することが大切である。実際、このような活動を行うことによって、その課題に対する数学の見方・考え方がより深く理解され、いわゆる生きて働く知識・技能となるのである。

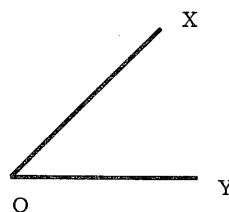
そこで、本時では、心動かされる場面⑥の一応の解決が図られた場面において、「もっとよくしたい」「別な作図方法はないかな」「別な証明方法はないかな」といっ

た多様な考えができるような授業を展開したいと考えている。

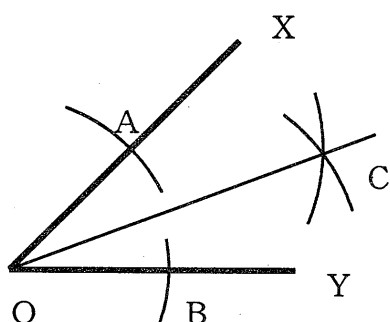
その際、「友達に伝えたい」「考えを聞いてほしい」という気持ちが学習意欲の喚起と維持に促進的に働くと考えられる。そこで、「考える楽しさ」の片輪である「友達と関わる楽しさ」を十分に実感させながら授業を展開していくことにする。

イ 授業展開

第1学年で学習した角の二等分線の作図は、
本当に正しいかどうか考えてみよう。



授業の導入の段階では、その作図方法が本当に正しいかどうかを考察するには、証明が必要であることを想起させ、三角形の合同条件を用いて証明させるようにする。その際、実際に作図させることにより、コンパスで等しい長さをとった線分が仮定となることをおさえる。作図と証明は以下の通りである。



【証明】 $\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ において

$AO = BO$ (仮定)

$AC = BC$ (仮定)

OC は共通

3辺がそれぞれ等しいから

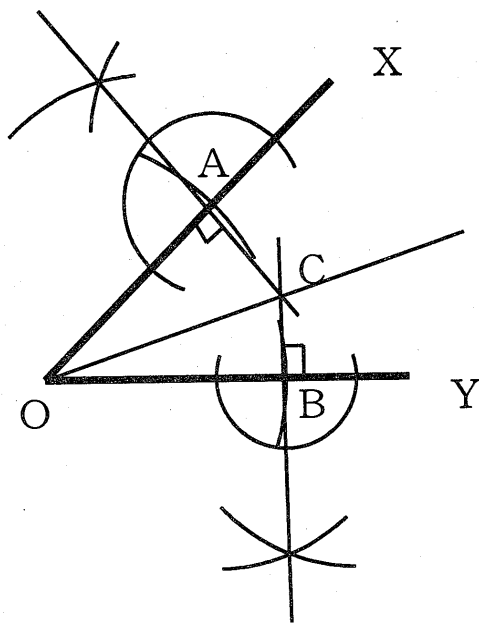
$\triangle AOC \equiv \triangle BOC$

よって、 $\angle AOC = \angle BOC$

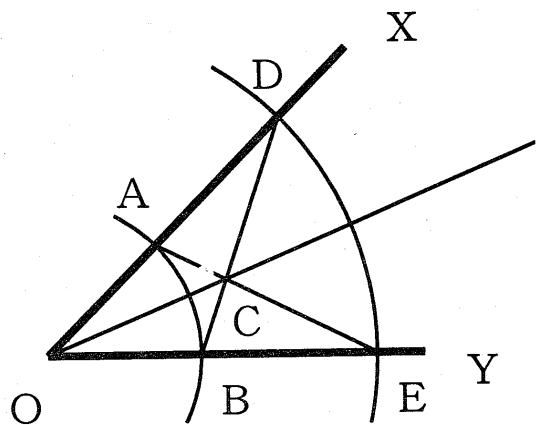
ここで授業を終わりにしたのでは、おもしろくもないし、楽しくもない。そこで、次に一応の解決が図られた後、別な角の二等分線の作図方法を自由に考えさせた。別な作図方法を考えさせることにより、「別な作図方法があるのか」といった疑問が芽生え、知的好奇心が刺激され、学ぶ意欲の向上が期待できると考えたからである。

授業の次の段階は、それぞれの生徒たちの考えた角の二等分線の作図方法の発表と話し合いである。この発表・話し合いの過程で、生徒は他の生徒の別な角の二等分線の作図方法について初めて触れる。その結果、生徒たちは、「いろいろな作図方法があるんだなあ」と、多様な作図方法の存在に気付く。そして、その作図方法が本当に正しいのか、証明してみたいという意欲がわき上がってくるのである。別な角の二等分線の作図方法は以下の通りである。

①



②

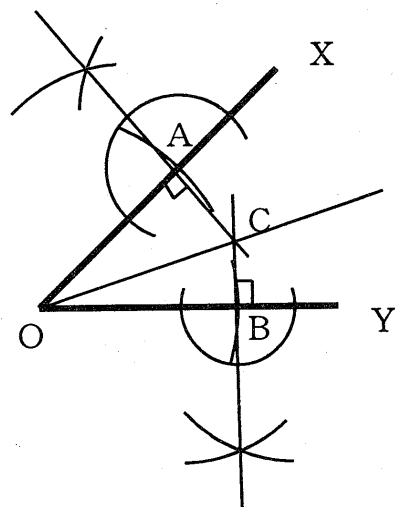


話し合いによって「証明したい」という意欲が高まった後に、いよいよ証明が始まる。生徒たちは、証明方法を発見したとき、「友達に伝えたい」「友達に聞いてほしい」という気持ちで取り組んでいる。そして、友達に対して、ただ単に形式的に聞いて型どおりの賞賛を求めているのではない。自分が発表したことについて友達がどのように反応を返してくれるか関心を持っているのである。

友達から自分の考えと異なる意見が出され、それに対して意見を述べ返す。相手も「うーん」とうなりながら別な角度から切り返してくる。やりとりを聞いていた別な生徒も、それに触発させ気付いた新たな解釈を添えていく。つまり、「友達と関わる楽しさ」を実感しながら証明を練り上げていくのである。実際に②の作図方法の証明では、「 $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ を証明すればいいだろう」「それなら $\triangle DOC \equiv \triangle EOC$ でもいいんじゃないか」「でもこの2組は三角形の合同条件にあてはまらないぞ」「じゃあ合同になる2つの三角形を取り出し、とりあえず証明していこう」といった話し合いがなされていた。証明は以下の通りである。

【①の証明例】

$\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ において
 $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$ (仮定)
 OC は共通
 $OA = OB$ (仮定)
 直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから
 $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$
 よって、 $\angle AOC = \angle BOC$



【②の証明例】

$\triangle OAE$ と $\triangle OBD$ において

$OA=OB$ (仮定), $OE=OD$ (仮定)

$\angle AOE=\angle BOD$ (共通)

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle OAE \equiv \triangle OBD$

よって, $\angle OEA=\angle ODB \dots ①$

$\triangle ACD$ と $\triangle BCE$ において

$AD=BE$ (仮定) $\dots ②$

$\angle ADC=\angle BEC$ (①より) $\dots ③$

対頂角は等しいから $\angle ACD=\angle BCE \dots ④$

③, ④より $\angle CAD=\angle CBE \dots ⑤$

②, ③, ⑤より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACD \equiv \triangle BCE$

よって, $CD=CE \dots ⑥$

$\triangle OCD$ と $\triangle OCE$ において

$OD=OE$ (仮定)

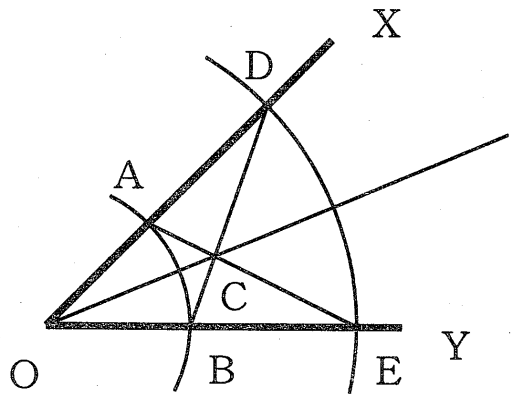
$CD=CE$ (⑥より)

OC は共通

3辺がそれぞれ等しいから

$\triangle OCD \equiv \triangle OCE$

よって, $\angle COD=\angle COE$



4 まとめ

今までの研究は、研究成果を教師が感じ取ったこと、生徒の感想などをもとにまとめることが多く、教師の主観が混じることにより正確性に不安が残ったが、本研究では、今回の調査と研究後の調査を比較してまとめることにより、研究成果を正確に捉えられるようにと考えている。3章で述べた調査結果が、現時点でよい方向に高い数値を示しているものもあるが、本校数学科として、研究後にこれらの数値が少しでも高くなるように数値目標をもって取り組んでいきたい。特に感じる楽しさについては、常に問題意識をもてるような生徒を育てられるよう、研究外においても課題設定に気を配れるようにしたい。

【参考・引用文献】

- ・ 青山庸：「問題を発展的に扱う数学科の指導 - 数学の授業改善をめざして-」, 東洋館, 1986年
- ・ 全国算数授業研究会編：「算数科 楽しさの追究は学力を向上させるか」, 東洋館, 2002年